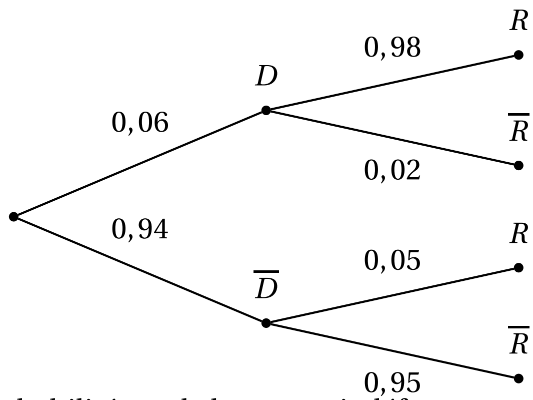
Corrigé du baccalauréat S Polynésie juin 2009

Exercice 1

1. *Arbre*



2. a. La probabilité que le lecteur soit défectueux et qu'il ne soit pas rejeté est :

$$p\left(D \cap \overline{R}\right) = p(D) \times p_D\left(\overline{R}\right) = 0,06 \times 0,02 = 0,0012$$

b. La probabilité qu'il y ait une d'erreur de contrôle est :

$$\begin{aligned} p &= p(D \cap \overline{R}) + p\left(\overline{D} \cap R\right)) \\ &= p(D) \times p_D\left(\overline{R}\right) + p\left(\overline{D}\right) \times p_{\overline{D}}(R) \\ &= 0,06 \times 0,02 + 0,94 \times 0,05 \\ &= 0,0482 \end{aligned}$$

3. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(\overline{R}) &= p\left(D \cap \overline{R}\right) + p\left(\overline{D} \cap \overline{R}\right)) \\ &= p(D) \times p_D(\overline{R})) + p\left(\overline{D}\right) \times p_{\overline{D}}\left(\overline{R}\right) \\ &= 0,06 \times 0,02 + 0,94 \times 0,95 \\ &= 0,8942 \end{aligned}$$

4. a. On se trouve en présence d'un schéma de Bernoulli : Il n'y a que deux issues le lecteur est accepté avec une probabilité $p = 0,8942$ ou refusé et on répète de façon indépendante cette expérience 4 fois. Le nombre de succès X suit la loi binômiale de paramètres $\mathscr{B}(4\ ;\ 0,8942)$.

— Un lecteur qui est vendu avec le logo de l'entreprise correspond à un gain de $120 - 50 = 70$€ et la probabilité correspondante est $p(X = 4) = 0,8942^4 \approx 0,6393$;

— Un lecteur qui est vendu sans logo correspond à un gain de de 10€et la probabilité correspondante est $p(X \leqslant 3) = \binom{4}{3} 0{,}105\,8^1 \times 0{,}894\,2^3 \approx 0{,}302\,6$;

— Les autres lecteurs sont rejetés, ils correspondent à une perte de 50€et la probabilité correspondante est $1-(0{,}639\,3+0{,}302\,6) = 0{,}058\,1$

On a le tableau suivant :

g_i	120	10	-50
$p(G=g_i)$	0,639 3	0,302 6	0,058 1

b. L'espérance vaut :

$$E(G) = 70 \times 0{,}639\,3 + 10 \times 0{,}302\,6 - 50 \times 0{,}058\,1 \approx 44,87$$

Cela signifie que l'entreprise réalisera un gain moyen de 44,87€ par lecteur MP3 fabriqué.

Exercice 2

Obligatoire

Partie A

Soit $M(z)$ un point du plan et $M'(z')$ son image dans la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α.

Si $M = \Omega$ alors $M' = \Omega$ et on a bien $z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z-\omega)$.

Si $M \neq \Omega$ alors

$M'(z')$ est l'image de $M(z)$ dans la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α équivaut à

$$\left\{\begin{array}{rcl}\left(\overrightarrow{\Omega M'};\overrightarrow{\Omega M}\right) &=& \alpha\\ \Omega M &=& \Omega M'\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}\arg\left(\dfrac{z-\omega}{z'-\omega}\right) &=& \alpha\\ |z-\omega| &=& |z'-\omega|\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}\arg\left(\dfrac{z-\omega}{z'-\omega}\right) &=& \alpha\\ \left|\dfrac{z-\omega}{z'-\omega}\right| &=& 1\end{array}\right.$$

Le complexe $\dfrac{z-\omega}{z'-\omega}$ a pour module 1 et argument α, il s'écrit donc $\dfrac{z-\omega}{z'-\omega} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$

d'où $\qquad z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z-\omega)$

Partie B

1. a. L'affixe ω du point Ω tel que $f(\Omega) = \Omega$ vérifie :

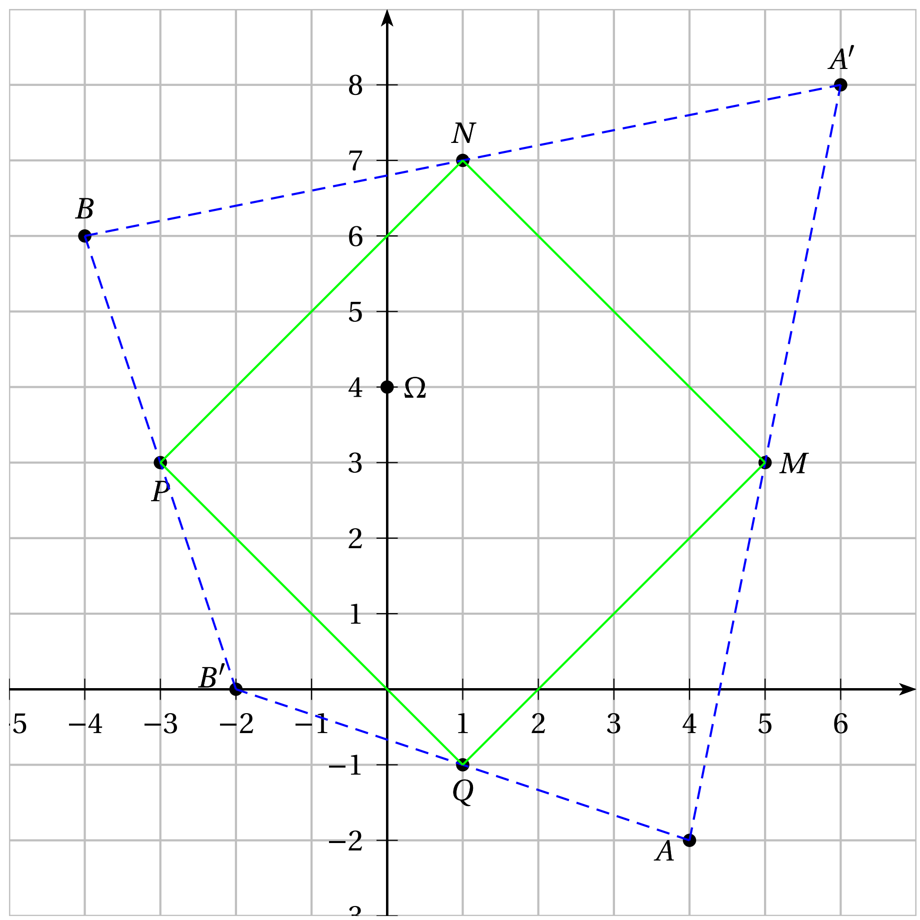
$$\begin{array}{rcl}\omega &=& \mathrm{i}\omega + 4 + 4\mathrm{i}\\ \omega(1-\mathrm{i}) &=& 4+4\mathrm{i}\\ \omega &=& \dfrac{4+4\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\\ \omega &=& \cdots\\ \omega &=& 4\mathrm{i}\end{array}$$

b. Pour tout nombre complexe z on a :

$$\begin{aligned} z' - 4\mathrm{i} &= \mathrm{i}z + 4 \\ &= \mathrm{i}z - 4\mathrm{i}^2 \\ &= \mathrm{i}(z - 4\mathrm{i}) \end{aligned}$$

c. L'égalité précédente peut s'écrire $z' - \omega = \mathrm{i}(z - \omega)$, c'est à dire $z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z - \omega)$, qui est l'écriture complexe de la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

2. **a.** *Figure*



b. On a :

$$\begin{aligned} z_{\mathrm{A}'} &= \mathrm{i}z_{\mathrm{A}} + 4 + 4\mathrm{i} \\ &= \cdots \\ &= 6 + 6\mathrm{i} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z_{\mathrm{B}'} &= \mathrm{i}z_{\mathrm{B}} + 4 + 4\mathrm{i} \\ &= \cdots \\ &= -2 \end{aligned}$$

3. **a.** M étant le milieu de [AA′], on a $m = \dfrac{z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{A}'}}{2} = \cdots = 5 + 2\mathrm{i}$

b. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ a pour affixe $n - m = \cdots = -4 + 4\mathrm{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ a pour affixe $p - q = \cdots = -4 + 4\mathrm{i}$. Les vecteurs sont donc égaux et par conséquent MNPQ est un parallélogramme.

c. On a :

$$\frac{q-m}{n-m}=\frac{-4-4\mathrm{i}}{-4+4\mathrm{i}}=\frac{(-4-4\mathrm{i})^2}{(-4)^2+4^2}=\cdots=\mathrm{i}$$

On en déduit que $q-m=\mathrm{i}(n-m)$ donc que a Q est l'image de N dans la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Par conséquent la parallélogramme MNPQ a un angle droit et deux côtés consécutif de même longueur, c'est un carré.

4. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}$ a pour affixe $z_{\mathrm{B'}}-z_{\mathrm{A}}=\cdots=-6+2\mathrm{i}$ et donc pour coordonnées $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}(-6\ ;\ 2)$ et le vecteur $\overrightarrow{\Omega\mathrm{N}}$ a pour affixe $n-\omega=\cdots=1+3\mathrm{i}$ et donc pour coordonnées $\overrightarrow{\Omega\mathrm{N}}(1\ ;\ 3)$.

Le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\Omega\mathrm{N}}$ vaut $-6\times1+2\times3=0$. Les vecteurs sont donc orthogonaux et les droites (B′A) et (ΩN) sont perpendiculaires.

Exercice 3

Commun à tous les candidats.

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère les points : A(1 ; −1 ; 3), B(0 ; 3 ; 1), C(6 ; −7 ; −1), D(2 ; 1 ; 3) et E(4 ; −6 ; 2).

1. a. Déterminons les coordonnées du barycentre du système $\{(\mathrm{A},\ 2),\ (\mathrm{B},-1),\ (C,\ 1)\}$:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(2x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}}+x_{\mathrm{C}} \\ &= \cdots \\ &= x_{\mathrm{E}} \end{aligned}\qquad \begin{aligned} y &= \tfrac{1}{2}(2y_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{C}} \\ &= \cdots \\ &= y_{\mathrm{E}} \end{aligned}\qquad \begin{aligned} z &= \tfrac{1}{2}(2z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{B}}+z_{\mathrm{C}} \\ &= \cdots \\ &= z_{\mathrm{E}} \end{aligned}$$

Le barycentre du système $\{(\mathrm{A},\ 2),\ (\mathrm{B},-1),\ (C,\ 1)\}$ est bien le point E.

b. Nous savons que pour tout point M de l'espace, $2\overrightarrow{M\mathrm{A}}-\overrightarrow{M\mathrm{B}}+\overrightarrow{M\mathrm{C}}=2\overrightarrow{M\mathrm{C}}$ car E est le barycentre du système $\{(\mathrm{A},\ 2),\ (\mathrm{B},-1),\ (C,\ 1)\}$. On a donc les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M\in\Gamma &\iff \left\|2\overrightarrow{M\mathrm{A}}-\overrightarrow{M\mathrm{B}}+\overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\|=2\sqrt{21} \\ &\iff \left\|2\overrightarrow{M\mathrm{E}}\right\|=2\sqrt{21} \\ &\iff M\mathrm{E}=\sqrt{21} \end{aligned}$$

L'ensemble Γ est donc la sphère de centre E et de rayon $\sqrt{21}$

2. a. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ ont pour coordonnées respectives $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

Les coordonnées n'étant pas proportionnelles, les vecteurs ne sont pas colinéaires et par conséquant les points A, B et D ne sont pas alignés, ils définissent bien un plan.

b. Le vecteur $\overrightarrow{\text{EC}}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{\text{EC}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$. On a :

$\overrightarrow{\text{EC}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 2\times(-1)-1\times4-3\times(-2) = 0$ donc $\overrightarrow{\text{EC}}\perp\overrightarrow{\text{AB}}$.
$\overrightarrow{\text{EC}}\cdot\overrightarrow{\text{AD}} = 2\times1-1\times2-3\times0 = 0$ donc $\overrightarrow{\text{EC}}\perp\overrightarrow{\text{AD}}$.
La droite (EC) étant orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABD) est orthogonale au plan (ABD).

c. Le vecteur $\overrightarrow{\text{EC}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABD) donc une équation de ce plan est $2x-y-3z+d=0$.
Or ce plan passe par A(1 ; −1 ; 3) donc $2\times1-(-1)-3\times3+d=0$ d'où $d=6$.
Une équation cartésienne du plan (ABD) est $\quad 2x-y-3z+6=0$.

3. a. La droite (EC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\text{EC}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ et passe par le point E(4 ; −6 ; 2), elle a donc pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+4\\ y &=& -t-6 \qquad t\in\mathbb{R}\\ z &=& -3t+2\end{array}\right.$$

b. Les coordonnées du point F intersection de la droite (EC) et du plan (ABD)vérifient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y-3z+6 &=& 0\\ x &=& 2t+4\\ y &=& -t-6\\ z &=& -3t+2\end{array}\right.$$

On a donc

$$\begin{array}{rcl} 2(2t+4)-(-t-6)-3(-3t+2)+6 &=& 0\\ 14t &=& -14\\ t &=& -1\end{array}$$

Le point F a donc pour coordonnées F(−2 + 4 ; 1 − 6 ; 3 + 2) c'est à dire F(2 ; −5 ; 5)

4. On cherche l'intersection entre la sphère Γ et le plan (ABD) il faut donc calculer la distance du centre E de la sphère au plan (ABD) c'est à dire la distance EF car F est le projeté orthogonal de E sur (ABD).

On a $\overrightarrow{\text{EF}}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ donc EF$=\sqrt{(-2)^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}$. Cette distance étant inférieure au rayon, le plan et la sphère sont sécants. Leur intersection est un un cercle de centre F.

Soit M un point de ce cercle, comme M est dans le plan (ABD) les droites (EF) et (FM) sont perpendiculaires en F, le triangle EFM est donc un triangle rectangle en F. D'après le théorème de Pythagore,

$\text{FM}^2 = \text{EM}^2 - \text{EF}^2 = \left(\sqrt{21}\right)^2 - \left(\sqrt{14}\right)^2 = 7$.

L'intersection entre la sphère Γ et le plan (ABD) est le cercle de centre F et de rayon $\sqrt{7}$.

Exercice 4 — 6 points

Commun à tous les candidats.

Partie A

1. Une primitive de f' est f donc
$$\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)\right]_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{1}{2\text{e}}.$$
2. Sur $[0\,;\,1]$, la courbe représentative de la fonction f est au-dessus du segment [OA] donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ qui correspond à l'aire sous la courbe est supérieure à l'aire du triangle OAA$'$, où A$'$ est le point de coordonnées $(1\,;\,0)$.
Or l'aire du triangle vaut $\dfrac{0\text{A} \times \text{AA}'}{2} = \cdots = \dfrac{1}{4\text{e}}$.
On a bien $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4\text{e}}$.

Partie B

1. Nous savons que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\text{e}^{-x} = 0$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 + 1 = +\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Ce qui signifie que la courbe $(\mathscr{C})$ admet pour asymptote l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.
2. On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.
La fonction g est un polynôme, elle est donc dérivable et pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty[$ on a :
$$g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$$
Comme x est positif, $g'(x)$ est toujours strictement positif et donc g est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $g(0) = -1$.
La fonction g est continue, strictement croissante et 0 appartient à l'intervalle image $[-1\,;\,+\infty[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. **a.** f est un quotient de fonctions dérivables, elle est donc dérivable et pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}\right)\left(x^2+1\right) - x\mathrm{e}^{-x} \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}\\
f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x}\Big((1-x)\left(x^2+1\right) - 2x^2\Big)}{\left(x^2+1\right)^2}\\
f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x}\left(-x^3 - x^2 - x + 1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}\\
f'(x) &= \frac{-g(x)\mathrm{e}^{-x}}{\left(x^2+1\right)^2}
\end{aligned}$$

Le dénominateur est toujours strictement positif car c'sst un carré et e^{-x} est toujours strictement positif car c'est une exponentielle donc $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.

b. Nous avons vu que g était strictement croissante et s'annulait en α donc $g(x)$ est négatif sur $[0\ ,\ \alpha[$ et positif sur $]\alpha\ ,\ +\infty[$. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{2n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. D'après la question précédente, on sait que pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty[\quad f(x)$ est positif.

Etudions le signe de $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{x^2+1} = \cdots = \dfrac{(x-1)^2}{2\left(x^2+1\right)}$.

Le numérateur étant un carré est toujours positif et le dénominateur est toujours positif on en déduit que $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{x^2+1} \geqslant 0$ c'est à dire que $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

b. f ne prenant que des valeurs positives, d'après la positivité de l'intégrale $0 \leqslant u_n$.

Pour tout réel $x \in [0\ ;\ +\infty[$ on a :

$$\frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$$

donc $$\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$$ car $\mathrm{e}^{-x} > 0$

d'où $$\int_n^{2n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{2n} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$u_n \leqslant \frac{1}{2}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_n^{2n}$$

$$u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-2n}\right)$$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-2n} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-2n}\right) = 0$.
Le théorème d'encadrement nous permet d'affirmer que la suite (u_n) converge et a pour limite 0 en $+\infty$.