Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Polynésie juin 1992 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit C la courbe plane définie par la représentation paramétrique :

$$t \longmapsto \overrightarrow{\text{O}M(t)} = x(t)\vec{u} + y(t)\vec{v} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}_+,$$

$$x(t) = \text{e}^{-t}\cos t \quad \text{et} \quad y(t) = \text{e}^{-t}\sin t.$$

On donne

$$\cos t - \sin t = \sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

1. Étudier les variations des fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ sur $[0\ ;\ \pi]$.
Montrer que C admet une tangente en chacun de ses points. Tracer la partie de C pour t appartenant à $[0\ ;\ \pi]$ (on prendra comme unité 10 cm sur chaque axe).
Préciser en particulier les tangentes à C pour $t = 0$, $t = \dfrac{\pi}{2}$ et $t = \pi$.

2. Montrer que $M\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ est l'image de $M(t)$ par une similitude plane directe de centre O que l'on précisera. (On pourra exprimer l'affixe z' de $M\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ en fonction de l'affixe z de $M(t)$.)

3. On admet que la longueur de l'arc exprimée en centimètres de la courbe C entre les points $M(0)$ et $M(t)$ est :

$$L(t) = 10\int_0^t \sqrt{[x']^2 + [y']^2}\,\text{d}t.$$

Calculer $L(t)$. Donner une valeur approchée de $L(\pi)$ à 10^{-2} près.
La longueur $L(t)$ a-t-elle une limite quand t tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2 **4 points**

Le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soit E l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient l'équation :

$$21x^2 + 31y^2 - 10\sqrt{3}xy - 576 = 0.$$

1. Soit f la similitude de centre O, d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et de rapport $\dfrac{1}{2}$.
Soit M' l'image de M par f.
Caractériser f^{-1} et calculer les coordonnées x et y de M en fonction des coordonnées x' et y' de M'.

2. Donner une équation de E' image de E par f et montrer que E' est une conique dont on précisera la nature, les sommets, l'excentricité, les foyers et les directrices.

3. En déduire que E est une conique dont on précisera la nature, les sommets et l'excentricité.
Construire E et E' sur un même dessin en prenant 1 cm pour unité sur chaque axe.

PROBLÈME **12 points**

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

On se propose d'étudier la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Partie A

1. **a.** Étudier la fonction f

b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans un repère orthonormal (unité 4 cm).

2. **a.** Justifier l'existence de $F(x)$ pour tout x réel.

b. Montrer par des considérations d'aires relatives à $\mathscr{C}$ que F est une fonction impaire.

c. Déterminer le sens de variation de F.

d. Vérifier que pour tout réel t on a :

$$t^2 \geqslant 2t - 1.$$

En déduire que pour tout réel x de $\mathbb{R}_+$ on a :

$$F(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{2}.$$

On admettra que toute fonction croissante et majorée sur $[0~;~+\infty[$ admet une limite finie en $+\infty$.
On pose $\lim\limits_{+\infty} F = \ell$. Quel encadrement peut-on déjà donner de ℓ ?

Partie B

On se propose dans cette partie d'obtenir un encadrement de $F(1)$.

1. k désigne un réel strictement positif. Soit la fonction φ_k définie sur $[0~;1]$ par :

$$\varphi_k(x) = \mathrm{e}^{-x} - \left(1 - x + kx^2\right)$$

Calculer φ'_k et φ''_k.

2. **a.** Montrer à l'aide des variations de $\varphi'_{\frac{1}{2}}$ et $\varphi_{\frac{1}{2}}$ que $\varphi_{\frac{1}{2}}$ est négative sur $[0~;1]$.

b. Étudier les variations de $\varphi'_{\frac{1}{\mathrm{e}}}$;.
Montrer qu'il existe un réel unique α de $[0~;1]$ tel que $\varphi'_{\frac{1}{\mathrm{e}}}(\alpha) = 0$.
Montrer alors à l'aide de ses variations que $\varphi_{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ est positive sur $[0~;1]$.

c. En déduire que pour tout x de $[0~;1]$ on a :

$$1 - x^2 + \frac{x^4}{\mathrm{e}} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

et donner un encadrement de $F(1)$.

Partie C

On se propose maintenant de donner une valeur approchée de ℓ.

1. On pose : $\lambda(x) = \text{e}^x - \dfrac{9}{10}(2x+1)$. 10 Déterminer le sens de variation de λ sur $[1\ ;\ +\infty[$. En déduire le signe de λ sur $[1\ ;\ +\infty[$.

2. Prouver que pour tout réel $x \geqslant 1$ on a :

$$\frac{9}{10}(2x+1)\text{e}^{-x^2-x} \leqslant \text{e}^{-x^2}.$$

3. **a.** À l'aide de A 2. et C 2. déterminer un encadrement de $f(t)$ sur $[1\ ;\ +\infty[$ puis un encadrement de $F(x - F(1)$ pour tout x de $[1\ ;\ +\infty[$.

b. En déduire une valeur approchée de ℓ à $5 \cdot 10^{-2}$ près.

4. Donner l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthonormal (unité 4 cm sur chaque axe). On placera la tangente au point d'abscisse 0, les asymptotes et les points d'abscisses 1 et -1.