Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Polynésie juin 1995 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

α étant un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0~;~\pi]$ et z un nombre complexe, on considère le polynôme $P(z)$ défini par :

$$P(z) = z^3 - (1 - 2\sin\alpha)z^2 + (1 - 2\sin\alpha)z - 1.$$

1. **a.** Calculer $P(1)$.

   b. En déduire l'existence de trois nombres réels a, b, c tels que :

   $$P(z) = (z-1)\left(az^2 + bz + c\right).$$

   Déterminer a, b, c.

   c. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

2. On considère trois nombres complexes :

   $$z_1 = 1 \quad ; \quad z_2 = -\sin\alpha + \mathrm{i}\cos\alpha \quad ; \quad z_3 = -\sin\alpha - \mathrm{i}\cos\alpha.$$

   Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes z_1, z_2 et z_3.

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement obligatoire

Un supermarché commercialise des gaufrettes vendues par paquets pour lesquels :

- dans 5 % des cas l'emballage n'est pas intact ;
- dans 70 % des paquets d'emballage non intact, il y a au moins une gaufrette cassée ;
- 90 % des paquets d'emballage intact ne contiennent aucune gaufrette cass ée.

1. Un client achète au hasard un paquet de ces gaufrettes.
   On note I l'évènement : « l'emballage est intact » et C l'évènement : « au moins une gaufrette est cassée ».

   a. Calculer la probabilité de I.

   b. On considère les évènements suivants :
   E : « l'emballage n'est pas intact et aucune gaufrette n'est cassée »
   F : « l'emballage est intact et aucune gaufrette n'est cassée ».
   Exprimer E et F en fonction de I, $\overline{I}$ (évènement contraire de I) et $\overline{C}$ (évènement contraire de C).
   Calculer alors les probabilités de E, de F.
   En déduire la probabilité de $\overline{C}$ (évènement contraire de C) puis celle de C.

2. Lors d'une vente promotionnelle dans ce supermarché, ces gaufrettes sont vendues par lots de cinq paquets. Un client achète au hasard un tel lot. On suppose que les tirages des paquets formant un lot sont indépendants.
   Quelle est la probabilité pour que dans ce lot il y ait au moins quatre paquets d'emballage intact ?
   Qu'il n'y ait aucune gaufrette cassée ? On donnera les résultats à 10^{-4} près.

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthononnal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On désigne par M, N, P trois points distincts de ce plan d'affixes respectives m, n, p.

1. Démontrer que le triangle MNP est rectangle en N si et seulement si le nombre complexe $\text{i}\dfrac{p-n}{m-n}$ est un réel non nul.
2. Dans cette question M, N, P sont d'affixes respectives z, z^2, z^4.
   a. Quelles conditions doit vérifier z pour que M, N, P soient distincts deux à deux ?
   b. Démontrer que l'ensemble des points M d'affixe $z = x + \text{i}y$ du plan tels que le triangle MNP soit rectangle en N est une conique Γ d'équation $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \dfrac{1}{4}$, privée de deux points que l'on précisera.
3. Préciser la nature de Γ et déterminer ses éléments géométriques (sommets, foyers, excentricité, asymptotes).
4. Représenter Γ et mettre en place sur la figure les sommets, les foyers et les asymptotes de Γ.

PROBLÈME **12 points**

Le but du problème est d'étudier, dans un premier temps, la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \text{ pour } x > 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

puis de trouver une approximation de la solution de l'équation $f(x) = x$.

Partie A

Dans cette partie le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 2 cm. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans ce repère .

I- Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}.$$

1. **a.** Étudier le sens de variation de g.
   b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
   c. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $[2\ ;\ 3]$, on a $g(x) < \frac{1}{2}$.

II.

1. **a.** Déterminer la limite, quand x tend vers zéro par valeurs strictement positives, de $x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$ (on pourra poser $x = \frac{1}{t}$) et démontrer que f est continue en $x = 0$.
   b. La fonction f est-elle dérivable en $x = 0$? Donner une interprétation graphique de ce résultat.
   c. Étudier le sens de variation de f (on vérifiera que $f((x) = g(x))$.

2. **a.** Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) = 2$ (on pourra utiliser le résultat : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$).

   b. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   c. Montrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{x}{4} + \frac{5}{2}$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

3. Tracer dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $y = x$.

Partie B

Dans cette partie, on désigne par I l'intervalle $[2\,;\,3]$.

1. **a.** Soit h la fonction définie sur I par $h(x) = f(x) - x$. Montrer que pour tout x de I, $h'(x) < 0$ (on remarquera que $h?(x) = g?(x) - 1$).

   b. En déduire le sens de variation de h et montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans I ; on note α cette solution.

2. **a.** Montrer que pour tout x de I, $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$.

   b. En déduire que, pour tout x de I, $|f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   On admet que pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n appartient à l'intervalle I.

   a. Établir les inégalités suivantes :

   pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha| \quad (1)$

   pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \quad (2)$

   b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

   c. Déterminer n_0 entier naturel tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. En déduire alors une approximation de α à 10^{-3} près.