

∞ Baccalauréat S Polynésie septembre 2001 ∞

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

Pour tout naturel $n \geq 1$ on pose :

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .
2. Démontrer que pour tout naturel $n \geq 1$ on a :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

3. En déduire par récurrence que pour tout naturel $n \geq 1$ on a :

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} + I_n.$$

4. Montrer que l'on peut trouver une constante A telle que :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n n!} A.$$

On pourra déterminer A en majorant la fonction :

$$t \longmapsto (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} \quad \text{sur l'intervalle } [0; 1]$$

En déduire la limite quand n tend vers l'infini de :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!}.$$

Exercice 2

4 points

Enseignement obligatoire

Dans le plan complexe \mathcal{P} rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , unité graphique 4 cm, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives

$$z_A = 2i, \quad z_B = i, \quad z_C = -1 + i, \quad z_D = 1 + i.$$

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit la fonction f de $\mathcal{P} - \{B\}$ dans \mathcal{P} qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' où

$$z' = i \frac{z-2i}{z-i}.$$

- a. Développer $(z+1-i)(z-1-i)$.
 - b. Chercher les points M vérifiant $f(M) = M$ et exprimer leurs affixes sous forme algébrique puis trigonométrique.
2. a. Montrer que, pour tout z différent de i ,

$$|z'| = \frac{AM}{BM},$$

et que, pour tout z différent de i et de $2i$,

$$\arg(z') = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM} \right) + \frac{\pi}{2} \quad (\text{modulo } 2\pi).$$

- b. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.
 - c. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $\arg(z') = \frac{\pi}{2}$ (modulo 2π).
3. a. Démontrer que $z' - i = \frac{1}{z - i}$ et en déduire que $|z' - i| \times |z - i| = 1$, pour tout complexe z différent de i .
- b. Soit M un point du cercle \mathcal{C} de centre B et de rayon $\frac{1}{2}$. Prouver que le point M' d'affixe z' appartient à un cercle de centre B et de rayon à déterminer.

Exercice 2

4 points

Enseignement de spécialité

Dans le plan complexe \mathscr{P} rapporté au repère orthonormal direct $(A; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 1 cm, on considère les points B, D définis par : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = 3\vec{v}$ et C tel que ABCD soit un rectangle.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit E l'image de B par la translation de vecteur \overrightarrow{DB} . Déterminer l'affixe z_E de E.
2. Déterminer les nombres réels a, b tels que le point F d'affixe $z_F = 6 - i$ soit le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients a, b et 1.
3. On considère la similitude s qui transforme A en E et B en F. À tout point M d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' , image de M par s .
 - a. Exprimer z' en fonction de z .
 - b. Déterminer le centre I, l'angle et le rapport de la similitude s .
 - c. Déterminer les images de C et de D par s .
 - d. Calculer l'aire de l'image par s du rectangle ABCD.
4. a. Déterminer l'ensemble Ω des points M du plan tels que :

$$\|6\overrightarrow{MA} - 10\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 9.$$

- b. Déterminer, en précisant ses éléments caractéristiques, l'image de Ω par s .

Problème

11 points

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) . L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Montrer que, pour tout x de \mathbb{R} : $f(x) > 0$.
2. a. Montrer que, pour tout x de \mathbb{R} : $\sqrt{2} \cos x \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.
- b. En déduire que, pour tout x de \mathbb{R} : $2 + \cos x + \sin x > 0$.

- c. Montrer que f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .
- 3. a. Montrer que, pour tout x de \mathbb{R} : $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$.
 b. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 c. Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.
- 4. a. Montrer que, sur l'intervalle $[0 ; \pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α .
 b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
- 5. Représenter la courbe \mathcal{C} sur $[0 ; 4]$.

Partie B

On veut calculer l'aire \mathcal{A} , exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

- 1. Montrer que : $\mathcal{A} = 2e - 2 + \int_0^1 \cos t e^{1-t} dt$.
- 2. On pose : $I = \int_0^1 \cos t e^{1-t} dt$ et $J = \int_0^1 \sin t e^{1-t} dt$.
 a. À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$I = -\cos 1 + e - J \quad \text{et} \quad J = -\sin 1 + I.$$

- b. En déduire la valeur de I .
- 3. Déterminer la valeur exacte de \mathcal{A} en unités d'aire, puis donner une valeur approchée de \mathcal{A} si à 10^{-2} près par défaut.

Partie C

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}.$$

- 1. a. Montrer que la fonction h admet des primitives sur \mathbb{R} .
 b. Calculer la primitive H de la fonction h , qui prend en 0 la valeur $(1 + \ln 3)$.
- 2. a. Déterminer $\ln[f(x)]$ pour tout x de \mathbb{R} .
 b. Étudier le sens de variations de la fonction H .
 c. Déterminer le tableau de variations de H .
- 3. On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto 1 - x + \ln(2 + \cos x)$. (On ne demande pas de représenter Γ .) On appelle Δ la droite d'équation $y = -x + 1$.
 a. Étudier la position relative de Γ et de Δ .
 b. Déterminer les abscisses des points communs à Γ et Δ .
- 4. a. Établir une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.
 b. Étudier la position relative de Γ et T .
- 5. Montrer que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on donnera des équations.