Baccalauréat A1 et B Polynésie septembre 1994

EXERCICE 1 **5 points**

Marie et Thomas participent, avec 18 autres personnes, à un stage sportif en montagne où leur sont proposées plusieurs randonnées en vélo tout terrain. Les organisateurs du stage ne disposent que de 15 vélos. Avant chaque randonnée ils choisissent donc au hasard 15 personnes parmi les 20 stagiaires pour former un groupe de randonnée.
On supposera dans tout l'exercice que chaque stagiaire a la même probabilité d'être choisi, et que les divers choix de groupes de randonnée sont indépendants les uns des autres.

1. **a.** Calculer le nombre de groupes de randonnée différents que les organisateurs peuvent former.

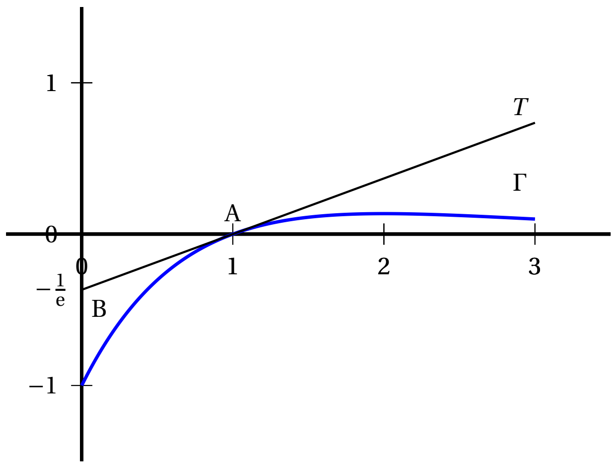
   b. On note A l'évènement « Marie participe à la première randonnée ». Montrer que la probabilité de A est égale à $\frac{3}{4}$.
2. On note B l'évènement « Marie et Thomas ne participent pas ensemble à la première randonnée ». Montrer que la probabilité, de B est égale à $\frac{17}{38}$.
3. Le résultat de cette question sera donné sous forme de fraction irréductible.
   Il y a en tout cinq randonnées organisées. On note C l'évènement « Marie participe à au moins une randonnée » et D l'évènement « Marie participe à exactement trois randonnées ».
   Calculer la probabilité de l'évènement $C \cap D$.

EXERCICE 2 SÉRIE B **4 points**

Le plan P est rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.
La courbe Γ, tracée ci-dessous à une échelle réduite, représente une fonction numérique f définie sur $[0\,;\,3]$ par

$$f(x) = (ax + b)\text{e}^{-x},$$

où a et b sont deux nombres qu'on se propose de déterminer.



1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.

2. Le point A(1 ; 0) est un point de Γ. Quelle relation entre a et b en déduit-on ? Cette relation sera notée (1).
3. La droite T est tangente en A à Γ et passe par le point $\mathrm{B}\left(0\,;\,-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$. Quel est son coefficient directeur ?
   Quelle relation entre a et b en déduit-on ? Cette relation sera notée (2).
4. Montrer que $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

PROBLÈME **5 points**

1. **QUESTION PRÉLIMINAIRE**

   Soit g la fonction numérique définie par :

   $$g(x) = x^2 + 1 - \ln x$$

   a. Calculer $g'(x)$, où g' désigne la fonction dérivée de g. Étudier son signe.

   b. Établir le tableau de variations de g. En déduire le signe de $g(x)$ (on ne demande pas le calcul des limites de g aux bornes de $\mathcal{D}_g$).

2. **ÉTUDE DE LA FONCTION NUMÉRIQUE *f* DÉFINIE PAR :**

   $$f(x) = 2x - 1 + 2\frac{\ln x}{x}.$$

   a. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_g$.

   b. Calculer $f'(x)$ et, en utilisant la question préliminaire déterminer son signe.

   c. Établir le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_g$.

   d. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $J = \left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$ une solution unique, notée x_0.

3. **COURBE REPRÉSENTATIVE DE *f* ET CALCUL D'AIRE**

   Le plan P est rapporté au repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 5 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées. La courbe représentative de f est notée $\mathcal{C}$.

   a. Calculer $f(x) - (2x-1)$, et montrer que la droite D d'équation $y = 2x-1$ est asymptote à $\mathcal{C}$. En déduire la position relative de D et $\mathcal{C}$.

   b. Construire D et $\mathcal{C}$ sur la figure et hachurer la partie du plan définie par $x_0 \leqslant x \leqslant 1$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 2x-1$. On se propose dans la suite de calculer l'aire A de cette partie du plan.

   c. Exprimer A à l'aide d'une intégrale.

   d. On pose $\varphi(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$, et $u(x) = \ln x$. Calculer $u'(x)$ et écrire φ en fonction de u et de u'. En déduire une primitive de φ, puis l'expression de A en fonction de x_0.

   e. On rappelle que $f(x_0) = 0$. Utiliser cette relation pour montrer que $A = \dfrac{1}{4}x_0^2\left(1-2x_0^2\right)$ (en unités d'aire).