Baccalauréat C Polynésie juin 1978

EXERCICE 1

Soit f, la fonction numérique de la variable réelle, définie de la manière suivante :

— pour tout x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$,

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}.$$

— pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, $f(x) = -\sqrt{x-1}$.

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est-elle dérivable à droite, dérivable à gauche, en $x_0 = 1$? Est-elle dérivable en $x_0 = 1$?
3. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. (On prendra 3 cm comme longueur commune de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$).
   On utilisera la question 2 pour préciser le tracé de la courbe en A, A étant le point de coordonnées $(1\,;\,0)$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
4. Calculer en cm^2, l'aire de la portion du plan limitée par la courbe (C), l'axe des x et les droites d'équations : $x = 1$, $x = 5$.

EXERCICE 2

Dans le plan affine euclidien $\mathscr{P}$, on considère quatre points A, B, C, D, sommets d'un carré dont le côté a pour longueur a (a est un réel positif quelconque). Soit O le centre de ce carré $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}\right)$.

1. Déterminer le nombre réel α, de façon que O soit le barycentre des points A, B, C et D affectés respectivement des coefficients $\alpha, 2, -1$ et 2.
2. Déterminer le nombre réel β, de façon que A soit le barycentre des points O, B, C et D affectés respectivement des coefficients β, 2, -1 et 2.
3. Quel est l'ensemble E des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

   $$-2M\mathrm{O}^2 + 2M\mathrm{B}^2 - M\mathrm{C}^2 + 2M\mathrm{D}^2 = k^2.$$

   (Discuter suivant les valeurs de k, réel quelconque).

PROBLÈME

Soit P un plan affine rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, (on prendra 2 cm comme longueur commune de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$). On identifie le plan complexe à P.
Soit F l'application de l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ dans lui-même, définie par :
Pour tout z de $\mathbb{C}$,

$$F(z) = z' = (a + \mathrm{i}b)z + (c + \mathrm{i}d)\overline{z} + m + \mathrm{i}n,$$

où a, b, c, d, m et n sont des réels quelconques.
Soit f l'application affine de P dans P qui à tout point M de P, d'affixe z, associe le point M', d'affixe $z' = F(z)$.

I

1. Donner l'expression analytique de f dans le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
2. Montrer que f est bijective si et seulement si les modules de $(a+\text{i}b)$ et $(c+\text{i}d)$ sont différents.
3. Soit φ l'application linéaire associée à f.
   Déterminer les conditions que doivent vérifier, a, b, c et d pour que φ soit une symétrie vectorielle.
4. Dans cette question, on suppose que φ est non bijective et n'est pas l'application identiquement nulle ; déterminer le réel a de façon que φ soit une projection vectorielle.

II

Dans cette partie, on suppose que $a = m = 0$, $c = 1$ et $d = b$, n et b étant des réels quelconques.

1. Montrer que l'application F est involutive.
2. En déduire la nature de f et donner ses éléments géométriques caractéristiques.
3. Existe-t-il des droites de P, globalement invariantes par toutes ces applications affines ?
4. À quelle condition f est-elle une isométrie ?
5. Soit la conique (E) qui a pour équation dans $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$:

$$X^2 - 2X + \frac{Y^2}{4} - Y + 1 = 0.$$

   Construire cette conique dans le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
6. Dans le cas où f est une isométrie, déterminer la valeur de n pour laquelle la conique (E) est globalement invariante par f.