∽ Baccalauréat C Polynésie française juin 1981 ∾

EXERCICE 1

L'espace vectoriel euclidien $\mathscr{E}_3$ étant muni d'une base orthonormée $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on appelle φ l'application linéaire de $\mathscr{E}_3$ dans lui même définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl}\varphi\left(\vec{\imath}\right) & = & 2\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k}\\ \varphi\left(\vec{\jmath}\right) & = & \vec{\imath}+2\vec{\jmath}+\vec{k}\\ \varphi\left(\vec{k}\right) & = & -\vec{\imath}+\vec{\jmath}+2\vec{k}\end{array}\right.$$

1. φ est-elle bijective ?
2. Déterminer l'image et le noyau de φ et vérifier qu'ils sont orthogonaux.
3. Montrer que la restriction de φ à lm φ est celle d'une homothétie vectorielle dont on indiquera le rapport (lm cp représente l'image de φ).
   En déduire que φ est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une projection vectorielle.
   Montrer qu'il en est de même pour φ', où φ' est définie pour n de $\mathbb{N}^\star$ par

$$\begin{array}{rlcl} & \varphi^1 & = & \varphi\\ \forall n \in \mathbb{N}^\star : & \varphi^{n+1} & = & \varphi^n\circ\varphi.\end{array}$$

EXERCICE 2

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^6+\left(1-2\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^3-2\mathrm{i}\sqrt{2}=0.$$

Représenter chacune des solutions dans le plan complexe (plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct).

PROBLÈME

On s'intéresse dans ce problème à l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$(1) \qquad y'-2y=8x^2-8x,$$

c'est-à-dire à l'ensemble $\mathscr{S}$ des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)-2f(x)=8x^2-8x.$$

Partie A

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{F}'$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{F}$ des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ (muni de l'addition de ces applications et de leur multiplication par un scalaire).

1. **a.** $\mathscr{S}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}'$?
   b. Montrer qu'il existe dans $\mathscr{S}$ une fonction polynôme du deuxième degré et une seule : préciser cet élément de $\mathscr{S}$.

2. **a.** Vérifier que si f et g sont des éléments de $\mathscr{S}$, alors leur différence $f - g$ est élément de $\mathscr{S}_h$, où $\mathscr{S}_h$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$(2) \qquad y' - 2y = 0,$$

c'est-à-dire l'ensemble $\mathscr{S}_h$ des fonctions h dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) - 2h(x) = 0.$$

b. Prouver que $\mathscr{S}_h$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, dont la fonction $h_1 : x \longmapsto \text{e}^{2x}$ constitue une base.
N.B. - On sera amené à poser $h = u \times h_1$ et montrer que $h \in \mathscr{S}_h$ si, et seulement si, u est une fonction constante.

3. En déduire que

$$\mathscr{S} = \left\{f \in \mathscr{F} : (\exists m \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = m\text{e}^{2x} - 4x^2\right\}.$$

Partie B

On considère dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ la famille des courbes représentatives des fonctions

$$f_m : x \longmapsto m\text{e}^{2x} - 4x^2 \text{(où } m \text{est un paramètre réel).}$$

1. Montrer que par tout point M du plan passe une courbe de la famille et une seule, et vérifier que pour une même abscisse x_0 l'ordonnée $f_m(x_0)$ du point de la courbe représentative de f_m est une fonction croissante de m.
On désignera par C_m la courbe représentative de la fonction f_m (le paramètre réel m étant fixé), ou encore par $\text{C}_{[M]}$ la courbe de la famille passant par le point M.

2. **a.** Étudier les variations de la fonction

$$\varphi : x \longmapsto 4x\text{e}^{-2x}$$

et construire sa courbe représentative.

b. En déduire, selon la valeur du paramètre m, les variations de la fonction f_m. (On sera amené à discuter le signe de $(m - \varphi(x))$.

3. **a.** Selon la valeur de m, la courbe C_m possède au plus deux points où la tangente est parallèle à l'axe $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath}\right)$; montrer que lorsque m décrit $\mathbb{R}$ l'ensemble des points ainsi obtenus est une parabole (P) dont on donnera une équation cartésienne et dont on indiquera le sommet S.

b. Montrer que la tangente à C_m en son point d'intersection avec l'axe $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ passe par le point I de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\ 0\right)$.

4. **a.** Tracer sur un même graphique et avec soin, en prenant 4 cm pour unité de longueur,
— la parabole (P).
— la courbe C_0 (correspondant à $m = 0$),
— la courbe $\text{C}_{\frac{2}{\text{e}}}$ (dont on vérifiera qu'elle passe par le sommet S de (P)).

b. Déterminer l'aire de la partie du plan comprise entre la droite D_α d'équation $x = -\alpha$ (où α est un réel positif donné), la courbe C_0, la courbe C_1. et l'arc (OS) de la parabole (P).
Quelle est la limite de cette aire lorsque α tend vers $+\infty$?

c. Construire encore sur ce graphique la courbe $\text{C}_{[\text{A}]}$ passant par le point A de coordonnées $(1\,;0)$.