Durée : 4 heures

Baccalauréat C Polynésie française juin 1982

EXERCICE 1 **4 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

$$493\lambda + 10 \equiv 2 \quad \text{modulo } 5.$$

2. Soit $N = \overline{xyzt}$ un entier naturel écrit dans le système décimal, x étant non nul.
Déterminer ce nombre sachant que les restes de la division de N par 17 et par 29 sont égaux à 10, et que les restes de la division de N par 5 et par 9 sont égaux à 2.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{3\mathrm{e}^x + 5}{\mathrm{e}^x + 2}.$$

1. Étudier f.

2. Montrer que f est bijective et déterminer sa fonction réciproque f^{-1}.

3. On considère le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm).
Calculer l'aire du domaine D limité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 3$, $y = \frac{5}{2}$ et la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = f(x)$.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

1. Pour tout (a, b) de $\mathbb{R}^2$ on pose

$$M(a,\ b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -5b & a+2b \end{pmatrix}$$

On considère l'ensemble $\mathscr{M}$ des matrices $M(a,\ b)$ où $(a,\ b)$ appartient à $\mathbb{R}^2$.

a. Montrer que, muni de l'addition et de la multiplication par un réel, $\mathscr{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En déterminer une base. Quelle est la dimension de $\mathscr{M}$?

b. Montrer que, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, $\mathscr{M}$ a une structure de corps commutatif.

2. **a.** Montrer que $(1,\ 1+2\mathrm{i})$ est une base de $\mathbb{C}$, espace vectoriel de dimension 2 sur IR. En déduire que tout nombre complexe peut se mettre de façon unique sous la forme a + b (1 + 21).

b. À tout nombre complexe z s'écrivant $a + b(1+2\mathrm{i})$ on associe la matrice $M(a,\ b)$ que l'on notera $\varphi(z)$.
Montrer que l'application φ de $\mathbb{C}$ dans $\mathscr{M}$ ainsi définie est un isomorphisme de $\mathbb{C}$ muni de l'addition dans $\mathscr{M}$ muni de l'addition.

c. Montrer que l'on a aussi

$$(\forall (z,\ z') \in \mathbb{C}^2, \quad \varphi\left(z,\ z'\right) = \varphi(z)\varphi\left(z'\right).$$

Quelle conclusion peut-on en tirer ?

3. a. Montrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{pmatrix}$$

b. De façon générale montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^\star$

$$\left[\varphi\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^n = \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{3} & \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{3} \\ -\frac{5}{2}\sin\frac{n\pi}{3} & \cos\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{3} \end{pmatrix}$$

Partie B

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien d'espace vectoriel associé E rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$.
Soit Ψ l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui laisse O invariant et qui a pour endomorphisme associé l'endomorphisme de matrice $\varphi\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Soit A_0 le point de coordonnées (1 ; 1) dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\epsilon_1},\ \overrightarrow{\epsilon_2}\right)$.
On considère la suite de points $\mathrm{A}_1 = \Psi\left(\mathrm{A}_0\right)$, et $\left(\forall n \in \mathbb{N}^\star\right), \quad \mathrm{A}_n = \Psi\left(\mathrm{A}_{n-1}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées x_n et y_n du point A_n.
2. Montrer que les suites x_n et y_n sont périodiques.
3. Déterminer l'isobarycentre des points $\mathrm{A}_0,\ \mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3,\ \mathrm{A}_4,\ \mathrm{A}_5$.

Partie C

On considère dans $\mathscr{E}$ l'application affine g définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x \\ y' & = & \frac{x-y}{2}, \end{array}\right.$$

On désigne par F son endomorphisme associé.

1. Pour tout réel λ on appelle E_λ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ tels que $\mathrm{F}\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda\overrightarrow{u}$. Montrer que E_λ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe deux valeurs distinctes λ_1 et λ_2 de λ pour lesquelles E_λ n'est pas réduit à $\{0\}$. Déterminer une base de E_{λ_1} et une base de E_{λ_2}.
3. **a.** On considère $\overrightarrow{U} = 3\overrightarrow{\epsilon_1} = \epsilon_2$ et $\overrightarrow{V} = \epsilon_2$. Montrer que $\left(\overrightarrow{U},\ \overrightarrow{V}\right)$ est une base de E. Est-elle orthonormée ?

   b. Quelle est la matrice de F dans la base $\left(\overrightarrow{U},\ \overrightarrow{V}\right)$?

   c. Si un point M a pour coordonnées $(X\ ;\ Y)$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{U},\ \overrightarrow{V}\right)$, exprimer les coordonnées $\left(X'\ ;\ Y'\right)$ de $g(M)$ dans ce même repère en fonction de $(X\ ;\ Y)$.

4. Soit p la projection affine sur la droite passant par O de vecteur directeur $\overrightarrow{U}$, de direction la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{V}$.

   Montrer que $(\forall M \in \mathscr{E}),\quad \overrightarrow{p(M)g(M)} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{p(M)M}$.

   En déduire la construction de $g(M)$ connaissant M, la construction de M connaissant $g(M)$.

5. Représenter les points $g\left(\text{A}_0\right),\ g\left(\text{A}_1\right),\ \cdots g\left(\text{A}_5\right)$ puis les points $\text{A}_0,\ \text{A}_1,\ \text{A}_2,\ \text{A}_3,\ \text{A}_4,\ \text{A}_5$ dans le plan rapporté au repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\epsilon_1},~\overrightarrow{\epsilon_2}\right)$.