∽ Baccalauréat C Polynésie juin 1984 ∾

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Soit A, B, C trois points non alignés du plan, et C′ le point défini par $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$. On désigne par f l'applicationn affine définie par :

$$f(A) = A \qquad f(B) = B \qquad f(C) = C'.$$

1. Montrer que l'application f est bijective. Déterminer l'ensemble des points invariants par f. Se peut-il que f soit une isométrie ?
   Montrer que toutes les droites parallèles à la droite (AB) sont globalement invariantes par f.
2. On désigne par G l'isobarycentre des points A, B et C et par G′ l'image de G par f.
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{GG'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   Montrer que le point G′ appartient à la droite (BC).
3. Soit M un point du plan. Donner une construction géométrique de son image M′ par l'application f.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Soit $P\left(O~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$ le plan complexe et f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ défmie par :

$$f(z) = 2z^2 - 2(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)z - \sin\theta(\sin\theta - \mathrm{i}\cos\theta)$$

où θ est un réel de l'intervalle $[0~;~2\pi]$.
On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels et on appelle M l'image de z dans le plan P.

1. Calculer la partie réelle de $f(z)$ en fonction de x et y.
2. Déterminer l'ensemble Γ_θ des points M de P pour lesquels $f(z)$ est un imaginaire pur.
   On montrera que Γ_θ est une conique dont on précisera la nature et le centre Ω_θ.
3. Quel est l'ensemble des points Ω_θ quand θ décrit $[0~;~2\pi]$?
4. Représenter Γ_θ pour $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ et préciser les éléments caractéristiques (foyers, directrices, ...).

PROBLÈME **5 POINTS**

Aux notations près, les parties A, B et C sont largement indépendantes.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-1~;~+\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(x) & = & \dfrac{1}{x}\ln(1+x), \quad \forall x \neq 0 \\ f(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

1. **a.** Montrer que la fonction φ définie sur I par :

   $$\varphi(x) = x - (x+1)\ln(x+1)$$

   présente un maximum absolu en 0.

b. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur l'intervalle I.

2. a. Montrer que f est continue et dérivable en 0 et que l'on a : $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

b. Faire le tableau de variations de la fonction f (on utilisera la question 1.).

c. Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ représenter la courbe représentative $(\mathscr{C})$, de la fonction f en prenant pour unité 4 cm.

Partie B

1. a. Montrer que l'équation $f(x) - x = 0$ admet une unique solution notée α.

b. Donner un encadrement de α dans un intervalle de longueur 10^{-3} ?

2. On propose, dans cette question, de démontrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

a. On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\psi(x) = x - (x+1)\ln(x+1) + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2}.$$

Calculer $\psi'(x)$ et $\psi''(x)$ et en déduire le signe de $\psi(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$.

b. Montrer que $\psi(x)$ et $f'(x) + \dfrac{1}{2}$ sont de même signe.

En déduire que, pour tout $x \geqslant 0$, $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

3. On définit par récurrence une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 5 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - u_{n-1}| \text{ů}$$

En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$.

b. Démontrer par récurrence que la suite $\left(u_{2p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $\left(u_{2p+1}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c. Démontrer en utilisant a. et b. que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite α défini au 1. a.

Partie C

Pour tout entier $p \geqslant 1$, on pose : p+l fP

$$I_p = \int_p^{p+1} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad S_p = \int_1^p f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. a. Démontrer les inégalités :

$$\frac{\ln(p+2)}{p+1} \leqslant I_p \leqslant \frac{\ln(p+1)}{p}.$$

b. En déduire la limite de la suite $\left(I_p\right)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ quand p tend vers plus l'infini.

2. a. Montrer que la suite $\left(I_p\right)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.

b. Exprimer S_p en fonction des I_k.

c. Démontrer que S_p tend vers l'infini quand p tend vers plus l'infini.