

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Polynésie juin 1985 ∞

EXERCICE 1

points

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit $\frac{\pi}{3}$.

On appelle (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC.

La médiatrice de [BC] coupe (Γ) en A et D; on appelle A' le point d'intersection des droites (BD) et (AC).

1. Démontrer que A' est le symétrique de A par rapport à C.
2. On désigne par S_{BD} , S_{DC} , S_{CA} , S_{AB} les symétries orthogonales par rapport aux droites (BD), (DC), (CA), (AB) respectivement.
 - a. Quelle est la nature des applications $S_{BD} \circ S_{DC}$ et $S_{CA} \circ S_{AB}$? On précisera les éléments caractéristiques.
 - b. Soit Δ la parallèle à (DC) menée par A et S_{Δ} la symétrie orthogonale par rapport à Δ .
Démontrer que

$$S_{BD} \circ S_{DC} = S_{DC} \circ S_{DA} \quad \text{et} \quad S_{CA} \circ S_{AB} = S_{DA} \circ S_{\Delta}.$$

- c. Retrouver le résultat du 1 en utilisant l'application

$$t = S_{BD} \circ S_{DC} \circ S_{CA} \circ S_{AB}$$

que l'on caractérisera.

EXERCICE 2

points

On appelle E le plan complexe privé du point A d'affixe i.

1. Démontrer que la relation : $zz' - i(z + z') - 2 = 0$ définit une application f de E dans E qui à tout point M d'affixe z associe l'image $M' = f(M)$ d'affixe z' .
2. Vérifier que l'application f est involutive.
Déterminer les points de E invariants par f .
3. On appelle B l'image par f du point O.
Établir les égalités suivantes :

$$OM' = \frac{MB}{MA}, \quad OM = \frac{M'B}{M'A}.$$

4. Soit (Γ) l'ensemble des points M de (E) tels que $\frac{MB}{MA} = \sqrt{2}$. Quelle est la nature de (Γ) ?
Vérifier que (Γ) passe par les points invariants de f et par le point d'affixe $i\sqrt{2}$.
Soit (Γ') l'image de (Γ) par f ; établir que $(\Gamma') = (\Gamma)$.