Baccalauréat C Polynésie juin 1987

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. Dans tout l'exercice, t désigne un nombre réel tel que

$$0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante d'inconnue z :

$$z^2 - 2(1+\cos 2t)z + 2(1+\cos 2t) = 0.$$

   Dans la suite de l'exercice, les solutions seront appelées z_1 et z_2, z_1 désignant celle dont la partie imaginaire est strictement positive.
   On note A le point d'affixe 1.
2. Étudier et représenter l'ensemble E_1 décrit par le point M_1 d'affixe z_1 lorsque t décrit l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}\,;\ \frac{\pi}{6}\right]$.
   En déduire l'ensemble E_2 décrit par le point M_2 d'affixe z_2 quand t décrit le même intervalle et représenter E_2.
3. **a.** Mettre z_1 sous forme trigonométrique.
   b. Soit M et M_1 les points d'affixes $z = 1 + \text{e}^{\text{i}t}$ et z_1.
   Montrer que la droite $(\text{O}M_1)$ est parallèle à la droite $(\text{A}M)$.
   c. Comparer l'aire $A(t)$ du triangle $\text{A}M_1M$ à celle du triangle $\text{AO}M$.
   Étudier le maximum de l'aire $A(t)$ lorsque t parcourt l'intervalle $\left]0\,;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC direct, c'est-à-dire tel que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right)$ admet une mesure comprise entre 0 et π.

On construit les triangles équilatéraux A′BC, B′AC et C′BA tels que les angles orientés $\left(\overrightarrow{\text{A'C}},\ \overrightarrow{\text{A'B}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\text{B'A}},\ \overrightarrow{\text{B'C}}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\text{C'B}},\ \overrightarrow{\text{C'A}}\right)$ admettent pour mesure $\frac{\pi}{3}$. Soient F, G et H les centres respectifs de ces triangles équilatéraux; on se propose de prouver que le triangle FGH est équilatéral direct.

1. Placer sur une figure les points et les triangles précédents.
2. On note r_1, r_2 et r_3 les rotations d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$ et de centres respectifs F, G et H.
   a. Déterminer le déplacement $r_1 \circ r_2 \circ r_3$ (on pourra préciser l'image de B).
   b. En déduire le centre et l'angle de la rotation $r = r_2 \circ r_3$.

   c. En déduire aussi que les points F, G et H sont distincts deux à deux.

3. On note s la réflexion par rapport à la droite (GH).
Déterminer les axes des réflexions s_2 et s_3 telles que $r_2 = s_2 \circ s$ et $r_3 = s \circ s_3$; montrer que ces axes se coupent en un point F′ tel que F′GH soit équilatéral direct.

4. Montrer enfin que F′ = F.

PROBLÈME **10 POINTS**

Dans ce problème, on se propose d'étudier les fonctions définies sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = \left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 \quad \text{et} \quad F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

A. Étude de la fonction *f*

1. **a.** Étudier le signe de $1 - \ln t$ où $t \in]0 ; +\infty[$.

   b. En déduire le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.

2. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

3. Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe représentative C dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : $\|\vec{\imath}\| = 1$ cm et $\|\vec{\jmath}\| = 20$ cm).

B. - Étude de la fonction *F*

1. Étude au voisinage de $+\infty$:

   a. Soit x un élément de $[1 ; +\infty[$. Prouver que pour tout élément t de $[x ; 2x]$,

$$\frac{\ln^2 x}{t^2} \leqslant f(t) \leqslant \frac{\ln^2 2x}{t^2}.$$

   En déduire que

$$\frac{\ln^2 x}{2x} \leqslant F(x) \leqslant \frac{\ln^2 2x}{2x}.$$

   b. Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Étude au voisinage de 0.

   a. Soit x un élément de $\left]0 ; \frac{1}{2}\right]$. Établir que

$$\frac{\ln^2 2x}{2x} \leqslant F(x) \leqslant \frac{\ln^2 x}{2x}.$$

   b. Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers 0.

3. Calcul de F.

a. Calculer

$$\int_1^u \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

puis

$$\int_1^u \frac{\ln^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

(On pourra intégrer par parties.)

b. En déduire que la fonction G définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$(1)\qquad G(u) = -\frac{\ln^2 u}{u} - 2\frac{\ln u}{u} - \frac{2}{u}.$$

est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

c. Prouver finalement que

$$(2)\qquad F(x) = G(2x) - G(x).$$

4. Variations de F.

a. À l'aide de (2), calculer la dérivée de F.

b. Montrer que $F'(x) = 0$ si et seulement si $(\ln 2x)^2 = 2(\ln x)^2$.

c. Prouver que cette équation admet deux solutions x_1 et x_2 telles que $x_1 < 1 < x_2$. Donner une valeur approchée de x_1 et x_2 à la précision 10^{-6}.

d. Étudier le signe de F'.

5. Courbe représentative de F.

a. Dresser le tableau de variations de F. Utiliser (2) pour préciser les valeurs de F aux points 1, x_1 et x_2.

b. Construire la courbe représentative Γ de F. (On prendra les mêmes unités graphiques que dans la partie A.)