

♯ Baccalauréat C Polynésie juin 1988 ♯

EXERCICE 1

5 POINTS

Dans un plan P, on considère trois points A, B, C non alignés. On note I, J, K les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB], et G l'isobarycentre de (A, B, C).

Pour tout point M du plan, on note P, Q et R les symétriques de M par rapport à I, J et K.

On se propose de prouver que les segments [AP], [BQ] et [CR] ont le même milieu, noté O, et que les points M, G et O sont alignés.

1. Placer les points et les segments précédents sur une figure.
2. Montrer qu'il existe une homothétie h_1 et une seule transformant A, B, C en I, J, K respectivement et déterminer cette homothétie.
3. Déterminer l'homothétie h_2 transformant (I, J, K) en (P, Q, R).
4. Préciser la nature de $f = h_2 \circ h_1$. Conclure.

EXERCICE 2

4 POINTS

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B.

Sur la figure, on prendra 6 cm comme longueur du segment [AB].

1. Étudier et construire l'ensemble E des points M du plan MA tels que $\frac{MA}{MB} = 3$.
2. Étudier et construire l'ensemble E' des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}$ (modulo 2π).
3. Soit C l'image de B par la rotation de centre A et dont l'angle admet pour mesure $\frac{2\pi}{3}$ et D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

On désigne par s la similitude directe transformant A en B et C en D.

- a. Déterminer le rapport et l'angle de s .
- b. On note I le centre de la similitude s .
Exprimer IB en fonction de IA et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$.
En déduire la position du point I et le placer sur la figure.
- c. Démontrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle ACD. (On ne demande pas de tracer ce cercle.)

PROBLÈME

11 POINTS

Le problème a pour objectif d'étudier le comportement des primitives successives de la fonction logarithme. Le plan est rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 1 cm).

A. Étude d'un exemple

1. Soit f_0 la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f_0(x) = \ln x$.
 - a. Rappeler brièvement l'allure de la courbe représentative de cette fonction.
 - b. En effectuant une intégration par parties, calculer

$$\int_1^x \ln t \, dt.$$

c. Soit f_1 la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f_1(x) = x(\ln x - 1).$$

Montrer que f_1 est l'unique primitive de f_0 admettant 0 pour limite en 0.

2. Soit f_2 la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f_2(x) = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{3}{2} \right).$$

- Calculer la dérivée de f_2
- Déterminer les limites de f_2 en 0 et en $+\infty$.
- On prolonge f_2 par continuité en 0; montrer que la fonction g ainsi obtenue est dérivable en 0.
- Dresser le tableau de variations de g .
- Préciser la tangente T à la courbe représentative \mathcal{C} de g au point A d'abscisse 1. Étudier la position relative de \mathcal{C} et de T . À cet effet, on précisera le signe de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par

$$h(x) = g(x) + x - \frac{1}{4}.$$

en étudiant sa dérivée h' et sa dérivée seconde h'' .

- Construire la courbe \mathcal{C} , la tangente T ainsi que les tangentes aux points où \mathcal{C} rencontre (Ox) .

B. Étude du cas général

Soit (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels, et, pour tout entier naturel n , la fonction φ_n définie sur $]0; +\infty[$ par

$$\varphi_n(x) = x^n [a_n \ln x - b_n].$$

- On suppose que $\varphi_0(x) = \ln x$ (c'est-à-dire que $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$) et que, pour tout entier $n \geq 0$, $\varphi'_{n+1} = \varphi_n$.
 - Expliciter les relations de récurrence reliant a_{n+1} et b_{n+1} à a_n et b_n .
 - Calculer a_n .
 - On pose $\alpha_n = n! b_n$; calculer $\alpha_{n+1} - \alpha_n$, en déduire α_n .
 - Prouver finalement que, nécessairement, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{n!} \left[\ln x - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right] \quad (1)$$

- On définit désormais φ_n par la relation (1), pour $n \geq 1$.
 - Contrôler que φ_n satisfait aux conditions de la question 1.
 - Expliquer pourquoi $\varphi_1 = f_1$ et $\varphi_2 = f_2$.
 - Prouver que, pour tout entier $p \geq 1$,

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{p}.$$

En déduire que

$$\ln n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \ln n + 1.$$

- Montrer enfin que, sur $]0; +\infty[$, φ_n s'annule en un point x_n et un seul, et que $n \leq x_n \leq ne$.