

Baccalauréat C Polynésie juin 1989

EXERCICE 1

5 POINTS

Soit un tétraèdre régulier ABCD, c'est-à-dire tel que $AB = AC = AD = BC = BD = CD = a$.

1. Soit A' l'isobarycentre du triangle BCD. Déterminer le réel m tel que le point G, milieu de $[AA']$, soit le barycentre du système $\{(A, m), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$. Placer ces différents points sur une figure.

Calculer GA^2 et GB^2 en fonction de a .

2. Déterminer l'ensemble Σ des points M de l'espace tels que

$$6MA^2 + 2MB^2 + 2MC^2 + 2MD^2 = 5a^2.$$

3. Déterminer l'ensemble Π des points M de l'espace tels que

$$MB^2 + MC^2 + MD^2 - 3MA^2 = a^2.$$

Vérifier que Π est le plan médiateur de $[AA']$.

4. Déterminer l'intersection Γ de Σ et Π et prouver que les milieux I, J, K des segments $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$ appartiennent à Γ . Placer Γ sur la figure.

EXERCICE 2

5 POINTS

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC. On se propose de construire un triangle $A'B'C'$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$;

(2) $(A'B')$ est orthogonale à (CA) , $(B'C')$ est orthogonale à (AB) , $(C'A')$ est orthogonale à (BC) .

À cet effet, on considère les droites perpendiculaires en A à (CA) , en B à (AB) et en C à (BC) , qui se coupent en A_1 , B_1 et C_1 (A est situé sur (A_1B_1) , B sur (B_1C_1) et C sur (C_1A_1)).

Soit s la similitude directe qui transforme A_1 en C et B_1 en A.

1. Étude de s .

- a. Placer les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sur une figure (pour cette figure, on prendra $AB = 6$ cm, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}$ et $BC = 5$ cm).

- b. Montrer que l'angle de la similitude s a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

- c. Démontrer que le centre O de s appartient aux cercles de diamètres $[AB_1]$ et $[CA_1]$. Placer O sur la figure.

- d. Déterminer les images par s des droites (C_1A_1) et (B_1C_1) .

En déduire l'image de C_1 par s . Prouver enfin que le cercle de diamètre $[BC]$ passe par O.

2. Construction du triangle $A'B'C'$

- a. Prouver que $h = s \circ s$ est une homothétie.

- b. Soit A', B', C' les images des points A_1B_1 et C_1 par h .

Montrer que A' appartient aux droites (OA_1) et (BC) .

- c. Montrer enfin que le triangle $A'B'C'$ satisfait aux conditions (1) et (2) et placer ce triangle sur la figure.

PROBLÈME**10 POINTS**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

L'objet du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x \left(e^{\frac{2}{x}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative.

1. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(t) = 1 - t - e^{-2t}.$$

- Étudier les variations de g et déterminer la limite de g en $+\infty$ (on ne demande pas de construire la courbe représentative de g).
- Démontrer qu'il existe un unique réel $a > 0$ tel que $g(a) = 0$ et prouver que $\frac{\ln 2}{2} < a < 1$.
- Étudier le signe de $g(t)$.
- Établir que $0,79 \leq a \leq 0,8$.

2. Variations de f .

- Justifier la dérivabilité de f sur $]0; +\infty[$ et montrer que pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \left(e^{\frac{2}{x}} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{x}} g\left(\frac{1}{x}\right).$$

- En déduire les variations de f .

3. Limite de f en 0

- Montrer que pour tout $x > 0$

$$\ln f(x) = \frac{1}{x}(1 + x \ln x) + \frac{1}{2} \ln \left(1 - e^{-\frac{2}{x}} \right).$$

- En déduire la limite de f en 0.

4. Étude de f en $+\infty$

- Établir que pour tout élément t de $[0; 1]$

$$0 \leq e^t \leq 1 + u + \frac{e}{2} u^2.$$

- En déduire, à l'aide d'une intégration, que pour tout élément u de $[0; 1]$

$$1 + u \leq e^u \leq 1 + u + \frac{e}{2} u^2.$$

- Utiliser cet encadrement pour démontrer que pour tout $x \geq 2$

$$0 \leq [f(x)]^2 - 2x \leq 2e.$$

- d.** Soit φ la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $\varphi(x) = \sqrt{2x}$.
Déterminer le signe de $f - \varphi$ et sa limite en $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats en introduisant la courbe représentative Γ de φ .
- 5.** Dresser le tableau de variation de f et tracer les courbes \mathcal{C} et Γ .
- 6.** Soit T la transformation du plan complexe dans lui-même qui, à tout point m d'affixe w , distinct de 0 et n'appartenant pas au cercle de centre O et de rayon 1, associe le point M d'affixe

$$z = \frac{\overline{w}}{\ln|w|}.$$

- a.** Exprimer les parties réelle et imaginaire x et y de z en fonction des parties réelle et imaginaire s et t de w .
- b.** En déduire une représentation paramétrique de l'ensemble E des points $M = T(m)$, lorsque m parcourt la droite d'équation $s = 1$, privée du point d'affixe 1.
- c.** Prouver enfin que E est la réunion de la courbe \mathcal{C} et d'une courbe \mathcal{C}_1 obtenue à partir de \mathcal{C} par une transformation simple que l'on précisera.