Baccalauréat C Polynésie juin 1990

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = \sin \pi x.$$

1. **a.** Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f (unité graphique : 8 cm).
   b. Calculer : $I = \displaystyle\int_0^1 \sin \pi x \,\mathrm{d}x$.
   c. Interpréter graphiquement cette intégrale.

2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right].$$

   a. Interpréter graphiquement S_n, en introduisant les rectangles R_k de base $\left[\dfrac{k}{n}\,;\,\dfrac{k+1}{n}\right]$ et de hauteur $f\left(\dfrac{k}{n}\right)$, où $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Faire la figure lorsque $n = 8$.
   b. Prouver que :

$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}} + \cdots + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n-1)\pi}{n}} = \frac{2}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}}.$$

   c. En déduire que :

$$\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

   d. Prouver finalement que :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{2}{\pi}.$$

3. Comparer les résultats des questions 1. et 2. et interpréter graphiquement.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC, de centre O, tel qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ soit $\dfrac{\pi}{3}$. On appelle $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit à ABC, I le milieu de (A, B) et J le milieu de (O, I). Les droites (OA) et (OC) recoupent $\mathscr{C}$ respectivement en D et E.

1. Placer ces points sur une figure (unité graphique : OA = 4 cm).
2. On note G l'isobarycentre des points A, B, C, D, E.
   a. Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$.
   b. Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$.
   c. En déduire que les droites (OB) et (DJ) se coupent en G.
   Placer G sur la figure.

3. À tout point M du plan, on fait correspondre le point $\mathrm{M}' = f(\mathrm{M})$ défini par :

$$4\overrightarrow{\mathrm{MM'}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{MD}} + \overrightarrow{\mathrm{ME}}.$$

a. Montrer que f est une homothétie, dont on précisera le centre et le rapport.

b. Quelles sont les images par f des points B et D ?

4. Soient r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{2\pi}{3}$, et $s = r \circ f$.

a. Démontrer que s est une similitude directe ; préciser son rapport et son angle.

b. Construire le point H, image de G par s. Démontrer que le centre Ω de s appartient aux cercles circonscrits respectivement aux triangles OGH et BOD. Construire Ω.

PROBLÈME **11 POINTS**

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1 \quad \text{et} \quad f(t) = \frac{t-1}{\ln t} \quad \text{si } t \in]0 ; 1[.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Le but du problème est d'étudier f et de calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

A. Étude de f

1. **a.** Montrer que f est continue en 0 et en 1.

b. Montrer que f est dérivable sur $]0 ; 1[$. Calculer $f'(t)$ et montrer que $f'(t)$ a le même signe que $\varphi(t)$, où φ est la fonction définie sur $]0 ; 1[$ par :

$$\varphi(t) = \ln t - 1 + \frac{1}{t}.$$

c. Étudier les variations puis le signe de φ ; en déduire le signe de f'.

2. Étudier la dérivabilité de f en 0 ; que peut-on en déduire pour la tangente à $\mathscr{C}$ au point O ?

3. **a.** Prouver que, pour tout élément u de $\left[0 ; \dfrac{1}{2}\right]$,

$$0 \leqslant \frac{1}{1-u} - (1+u) \leqslant 2u^2.$$

En déduire que :

$$0 \leqslant -\ln(1-u) - \left(u + \frac{u^2}{2}\right) \leqslant \frac{2u^3}{3}.$$

b. Soit g la fonction définie sur $]0 ; 1]$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Prouver que, pour tout élément h de $\left[-\dfrac{1}{2} ; 0\right]$,

$$0 \leqslant g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} \leqslant \frac{2h^2}{3}.$$

En déduire que g est dérivable en 1 et préciser $g'(1)$.

c. En déduire que f est dérivable en 1 et prouver que $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ (unité graphique : 10 cm).

B. Calcul de l'intégrale I

Pour tout élément x de $]0\,;\,1]$, on pose :

$$I(x) = \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

(On ne cherchera pas à calculer ces intégrales.)

1. Soit K la fonction définie sur $]0\,;\,1]$ par :

$$K(x) = J\left(x^2\right) - J(x).$$

a. Montrer que K est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et que :

$$K'(x) = \frac{1}{x}\left[f(x) - 2f\left(x^2\right)\right].$$

b. Prouver que, pour tout élément x de $]0\,;\,1]$,

$$f(x) - 2f\left(x^2\right) = -xf(x).$$

c. En déduire que, pour tout élément x de $]0\,;\,1]$,

$$I(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t. \qquad (1)$$

2. Calculer la dérivée de la fonction $t \longmapsto \ln(-\ln t)$ sur $]0\,;\,1]$. En déduire que pour tout élément x de $]0\,;\,1]$,

$$\int_{x^2}^{x} \frac{-1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t = \ln 2. \qquad (2)$$

3. Prouver que, pour tout élément x de $]0\,;\,1]$ et tout élément t de $]0\,;\,x[$,

$$0 \leqslant -\frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{-1}{\ln x}.$$

En déduire que, pour tout élément x de $]0\,;\,1]$,

$$0 \leqslant \left|\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{-x}{\ln x}. \qquad (3)$$

4. À partir de (1), (2) et (3), déterminer la limite de $I(x)$ lorsque x tend vers 0.

5. Établir que, pour tout élément x de $]0\,;\,1]$,

$$I - I(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que :

$$0 \leqslant I - I(x) \leqslant x.$$

6. Prouver finalement que $I = \ln 2$.