

Baccalauréat C Polynésie juin 1990

EXERCICE 1

4 POINTS

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par

$$f(x) = \sin \pi x.$$

1.
 - a. Tracer la courbe représentative \mathcal{C} de f (unité graphique : 8 cm).
 - b. Calculer : $I = \int_0^1 \sin \pi x \, dx$.
 - c. Interpréter graphiquement cette intégrale.
2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n} \left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right].$$

- a. Interpréter graphiquement S_n , en introduisant les rectangles R_k de base $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ et de hauteur $f\left(\frac{k}{n}\right)$, où $0 \leq k \leq n-1$. Faire la figure lorsque $n = 8$.
- b. Prouver que :

$$1 + e^{i\frac{\pi}{n}} + e^{i\frac{2\pi}{n}} + \dots + e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}} = \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}}.$$

- c. En déduire que :

$$\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}.$$

- d. Prouver finalement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{2}{\pi}.$$

3. Comparer les résultats des questions 1. et 2. et interpréter graphiquement.

EXERCICE 2

5 POINTS

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC, de centre O, tel qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit $\frac{\pi}{3}$. On appelle \mathcal{C} le cercle circonscrit à ABC, I le milieu de (A, B) et J le milieu de (O, I). Les droites (OA) et (OC) recoupent \mathcal{C} respectivement en D et E.

1. Placer ces points sur une figure (unité graphique : OA = 4 cm).
2. On note G l'isobarycentre des points A, B, C, D, E.
 - a. Exprimer \overrightarrow{OG} en fonction de \overrightarrow{OB} .
 - b. Exprimer \overrightarrow{OG} en fonction de \overrightarrow{OJ} et \overrightarrow{OD} .

c. En déduire que les droites (OB) et (DI) se coupent en G.

Placer G sur la figure.

3. À tout point M du plan, on fait correspondre le point $M' = f(M)$ défini par :

$$4\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}.$$

a. Montrer que f est une homothétie, dont on précisera le centre et le rapport.

b. Quelles sont les images par f des points B et D?

4. Soient r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$, et $s = r \circ f$.

a. Démontrer que s est une similitude directe; préciser son rapport et son angle.

b. Construire le point H, image de G par s . Démontrer que le centre Ω de s appartient aux cercles circonscrits respectivement aux triangles OGH et BOD. Construire Ω .

PROBLÈME

11 POINTS

On considère la fonction f définie sur $]0; 1]$ par :

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1 \quad \text{et} \quad f(t) = \frac{t-1}{\ln t} \quad \text{si } t \in]0; 1[.$$

On appelle \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Le but du problème est d'étudier f et de calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 f(t) dt.$$

A. Étude de f

1. a. Montrer que f est continue en 0 et en 1.

b. Montrer que f est dérivable sur $]0; 1[$. Calculer $f'(t)$ et montrer que $f'(t)$ a le même signe que $\varphi(t)$, où φ est la fonction définie sur $]0; 1[$ par :

$$\varphi(t) = \ln t - 1 + \frac{1}{t}.$$

c. Étudier les variations puis le signe de φ ; en déduire le signe de f' .

2. Étudier la dérivabilité de f en 0; que peut-on en déduire pour la tangente à \mathcal{C} au point O?

3. a. Prouver que, pour tout élément u de $\left]0; \frac{1}{2}\right]$,

$$0 \leq \frac{1}{1-u} - (1+u) \leq 2u^2.$$

En déduire que :

$$0 \leq -\ln(1-u) - \left(u + \frac{u^2}{2}\right) \leq \frac{2u^3}{3}.$$

- b. Soit g la fonction définie sur $]0; 1]$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Prouver que, pour tout élément h de $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$,

$$0 \leq g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} \leq \frac{2h^2}{3}.$$

En déduire que g est dérivable en 1 et préciser $g'(1)$.

- c. En déduire que f est dérivable en 1 et prouver que $f'(1) = \frac{1}{2}$.

4. Tracer la courbe \mathcal{C} (unité graphique : 10 cm).

B. Calcul de l'intégrale I

Pour tout élément x de $]0; 1]$, on pose :

$$I(x) = \int_x^1 f(t) dt \quad \text{et} \quad J(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt.$$

(On ne cherchera pas à calculer ces intégrales.)

1. Soit K la fonction définie sur $]0; 1]$ par :

$$K(x) = J(x^2) - J(x).$$

- a. Montrer que K est dérivable sur $]0; 1]$ et que :

$$K'(x) = \frac{1}{x} [f(x) - 2f(x^2)].$$

- b. Prouver que, pour tout élément x de $]0; 1]$,

$$f(x) - 2f(x^2) = -xf(x).$$

- c. En déduire que, pour tout élément x de $]0; 1]$,

$$I(x) = \int_{x^2}^x \frac{t-1}{t \ln t} dt. \quad (1)$$

2. Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \ln(-\ln t)$ sur $]0; 1]$. En déduire que pour tout élément x de $]0; 1]$,

$$\int_{x^2}^x \frac{-1}{t \ln t} dt = \ln 2. \quad (2)$$

3. Prouver que, pour tout élément x de $]0; 1]$ et tout élément t de $]0; x[$,

$$0 \leq -\frac{1}{\ln t} \leq \frac{-1}{\ln x}.$$

En déduire que, pour tout élément x de $]0; 1]$,

$$0 \leq \left| \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt \right| \leq \frac{-x}{\ln x}. \quad (3)$$

4. À partir de (1), (2) et (3), déterminer la limite de $I(x)$ lorsque x tend vers 0.
5. Établir que, pour tout élément x de $]0; 1]$,

$$I - I(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

En déduire que :

$$0 \leq I - I(x) \leq x.$$

6. Prouver finalement que $I = \ln 2$.