Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Polynésie juin 1991 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Dans cet exercice on se propose d'encadrer l'intégrale :

$$K = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

1. En étudiant les variations des fonctions

$$x \longmapsto g(x) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1 \quad \text{et} \quad x \longmapsto h(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \mathrm{e}^{-x}$$

sur l'intervalle $[0 ; 1]$ démontrer que

$$\text{pour tout } x \text{de } [0 ; 1], \quad 1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2} \quad (1)$$

2. Déduire de 1. un encadrement de e^{-x^2} pour x élément de $[0 ; 1]$ puis montrer que

$$\text{pour tout } x \text{ de } [0 ; 1], 1 - x \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+x} \leqslant 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)} \quad (2)$$

3. **a.** Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$: $\dfrac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \dfrac{1}{1+x}$.

b. Déduire alors de (2) que : $\dfrac{1}{2} \leqslant K \leqslant \dfrac{5}{24} + \dfrac{\ln 2}{2}$.

Donner une valeur approchée de K à $3 \cdot 10^{-2}$ près.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans un plan orienté, on considère un triangle rectangle ABC tel que l'angle $\left(\overrightarrow{\text{CA}}, \overrightarrow{\text{CB}}\right)$ mesure $+\dfrac{\pi}{2}$.
La hauteur issue de C coupe (BA) en H et coupe la parallèle à (BC) menée par A en D.
On pose CA = b et BC = a.

1. Soit s la similitude directe transformant C en A et B en C.

a. Déterminer son rapport en fonction de a et b et calculer son angle.

b. En utilisant cet angle, démontrer que le centre de s est le point H.

c. Quelle est l'image de A par s ?

2. En utilisant s, démontrer l'égalité : $\text{HC}^2 = \text{HA} \times \text{HB}$.

3. Soit I le milieu de [BC], J le milieu de [CA] et K le milieu de [AD].
Démontrer que le triangle IJK est rectangle en J et que dans ce triangle H est le pied de la hauteur issue de J.

PROBLÈME **11 points**

A. Une représentation paramétrique de la cardioïde

Dans un plan rapporté à un repère orthonormal d'origine 0, on se propose d'étudier la courbe Γ décrite par le point P d'affixe

$$z = (1+\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{pour } \theta \text{ dans } [-\pi\ ;\ \pi].$$

1. Déterminer la partie réelle $f(\theta)$ et la partie imaginaire $g(\theta)$ de z.
Étudier la parité des fonctions f et g, en déduire que la courbe Γ admet un axe de symétrie que l'on précisera.
On appellera Γ_1 la partie de Γ qui correspond à $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

2. f' et g' étant les dérivées de f et g, montrer que

$$\begin{array}{rcl} f'(\theta) & = & -\sin\theta(1+2\cos\theta) \\ g'(\theta) & = & \cos 2\theta + \cos\theta. \end{array}$$

3. Soit $\overrightarrow{t}$ le vecteur de coordonnées $\left(f'(\theta)\ ;\ g'(\theta)\right)$.

a. Montrer que $\overrightarrow{t}$ est un vecteur directeur de la tangente en P à Γ_1, sauf pour une valeur de θ que l'on précisera.

b. L'arc Γ_1 coupe l'axe des ordonnées en un point I autre que O.
Calculer l'ordonnée de I et déterminer la tangente à Γ en I.

c. Déterminer les points de l'arc Γ_1 pour lesquels le vecteur $\overrightarrow{t}$ dirige un des axes de coordonnées.

4. On suppose ici que θ vérifie : $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$.
Soit α le coefficient directeur de la droite (OP).
Montrer que : $\alpha = \tan\theta$. En déduire la tangente en O à Γ.

5. Déduire des questions précédentes le tableau de variations coordonnées des fonctions f et g $(\theta \in [O\ ;\ \pi])$.
En prenant 4 cm pour unité, construire Γ_1 puis Γ. On placera avec soin les points et les tangentes étudiés ci-dessus.

B. Cercle de cardioïde

On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [OA], où A est le point d'affixe 1.

1. Soit M le point d'affixe $\cos\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Montrer que le point M est sur le cercle $\mathscr{C}$ quelle que soit la valeur de θ réel.

2. On suppose maintenant que M a pour affixe :

$$z_M = \cos\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{avec } -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$$

et on lui associe le point P tel que le vecteur $\overrightarrow{MP}$ ait pour affixe : $z_{\overrightarrow{MP}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
Vérifier que le point P est sur la courbe Γ définie au début du problème. Montrer que les points 0, M et P sont alignés. Calculer la longueur MP. En déduire une construction point par point de Γ. (On distinguera les cas $\cos\theta > 0$ et $\cos\theta < 0$.)
Désormais, θ est fixé.

3. Les points M et P étant ceux de la question précédente, on considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{MP}$.

Montrer que l'image par t du cercle $\mathscr{C}$ est un cercle $\mathscr{C}'$.

Déterminer son centre et son rayon et montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont tangents au point T d'affixe :

$$z_T = \frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2}.$$

4. Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale s qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$.

On suppose $M \neq \mathrm{O}$, soit s_1 la symétrie orthogonale transformant O en M.

Justifier que l'on a $P = t \circ s_1(\mathrm{O})$ et en déduire que P est l'image de O par s.

5. On suppose $\theta \neq \pi$, montrer le vecteur $\overrightarrow{t}$ défini dans la première partie est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{TP}$. Déduire de cette étude une nouvelle construction de Γ et de ses tangentes.

Effectuer cette construction dans le cas où $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.