Durée : 4 heures

Baccalauréat C Polynésie juin 1994

EXERCICE 1 **points**

Dans une population donnée, 56 % des familles occupent une maison individuelle. Parmi elles, 78 % en sont propriétaires.
Parmi les familles n'occupant pas une maison individuelle, 24 % sont propriétaires de leur logement.

1. On choisit une famille au hasard dans la population considérée. Quelles sont :
   a. la probabilité pour qu'elle soit propriétaire de son logement?
   b. la probabilité pour qu'elle habite une maison individuelle sachant qu'elle n'en est pas propriétaire?
2. On interroge cinq familles au hasard dans la population considérée. On suppose que les choix successifs sont indépendants. On appelle X le nombre de familles propriétaires de leur logement.
   a. Quelle est la loi de probabilité de X? Donner la valeur de $P(X = k)$ en fonction de k.
   Calculer une valeur numérique approchée avec trois décimales de $P(X = k)$ pour k de 0 à 5.
   b. Calculer l'espérance de X.

EXERCICE 2 **points**
Enseignement obligatoire

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère dans $\mathscr{P}$ les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 1 + \text{i}\sqrt{3}, \quad z_{\text{B}} = -1 - \text{i et } z_{\text{C}} = -\left(2 + \sqrt{3}\right) + \text{i}.$$

1. **a.** Calculer le module et un argument du nombre complexe : $\text{W} = \dfrac{z_{\text{C}} - z_{\text{B}}}{z_{\text{A}} - z_{\text{B}}}$.
   b. En déduire la nature du triangle ABC.
2. **a.** Écrire le nombre complexe $\dfrac{z_{\text{A}}}{z_{\text{B}}}$ sous forme algébrique.
   b. Écrire les nombres z_{A} et z_{B} sous forme trigonométrique. En déduire la forme trigonométrique de $\dfrac{z_{\text{A}}}{z_{\text{B}}}$.
   c. À l'aide des deux questions précédentes donner les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

EXERCICE 2 **points**
Enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité 1 cm).

1. Déterminer les racines cubiques dans $\mathbb{C}$ de 216 et les mettre sous forme exponentielle.
   On appelle A, B et C les images de ces racines (on notera A le point dont l'affixe est réelle, et B celui dont l'affixe a une partie imaginaire positive). Placer ces points dans le plan.
2. Soit les points D, E et F d'affixes respectives $3 + \text{i}\sqrt{3}$, $-3 + \text{i}\sqrt{3}$ et $-2\text{i}\sqrt{3}$.

   a. Montrer que D appartient à la droite (AB). Placer D.
   b. Sur quelle droite se trouve E ? Placer E.
   c. Montrer que F appartient à la droite (AC). Placer F.
3. Montrer qu'il existe une similitude directe s unique transformant A en D et B en E et donner son expression complexe.
   Déterminer les éléments caractéristiques de s.
   Vérifier que s transforme C en F.

PROBLÈME **points**

Soit f la fonction numérique de variable réelle définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & x^3(1-\ln x) \quad \text{si } x>0\\ f(0) & = & 0.\end{array}\right.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$.
Unité graphique : 4 cm.

PARTIE A Étude de f

1. **a.** Montrer que f est continue en 0. (On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$.)
   b. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.
   Quelle est l'interprétation géométrique de ce nombre ?
   c. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. **a.** Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
   b. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en chacun des points d'abscisse 1 et e.
   c. Construire $\mathscr{C}$ et les tangentes introduites en b.

PARTIE B Étude d'une aire

Pour tout entier naturel n non nul on pose

$$I_n = \int_{1/n}^{\text{e}} f(t)\,\text{d}t.$$

1. **a.** Quelle est l'interprétation géométrique de I_n ?
   b. Sans calculer I_n étudier le sens de variation de la suite (I_n).
2. **a.** Déterminer l'expression de I_n en fonction de n ; on pourra utiliser une intégration par parties.
   b. En déduire la limite de (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

PARTIE C Résolution de l'équation $\boldsymbol{f(x) = x}$

L'équation $f(x) = x$ admet les deux solutions évidentes 0 et 1.
Le but est à présent de montrer qu'il existe une autre solution α, avec $\alpha > 1$.
On pose

$$g(x) = x^2(1-\ln x) \quad \text{pour } x \in]1~;~+\infty[.$$

1. Étudier les variations de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 1$ d'inconnue x admet une solution α et une seule, dont on donnera un encadrement décimal à 10^{-2} près.
3. Montrer que α est aussi l'unique solution appartenant à $]1~;~+\infty[$ de l'équation $f(x) = x$.