Durée : 4 heures

Baccalauréat S Polynésie septembre 1994

EXERCICE 1 **4 points**

Dans une population donnée, 56 % des familles occupent une maison individuelle. Parmi elles, 78 % en sont propriétaires.
Parmi les familles n'occupant pas une maison individuelle, 24 % sont propriétaires de leur logement.

1. On choisit une famille au hasard dans la population considérée. Quelles sont :
   a. la probabilité pour qu'elle soit propriétaire de son logement ?
   b. la probabilité pour qu'elle habite une maison individuelle sachant qu'elle n'en est pas propriétaire ?
2. On interroge cinq familles au hasard dans la population considérée. on suppose que les choix successifs sont indépendants.
   On appelle X le nombre de familles propriétaires de leur logement.
   a. Quelle est la loi de probabilité de X ? Donner la valeur de $P(X = k)$ en fonction de k.
   Calculer une valeur numérique approchée avec trois décimales de $P(X = k)$ pour k de 0 à 5.
   b. Calculer l'espérance de X.

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement obligatoire

1. On considère l'équation d'inconnue complexe z :

$$z^3 + 5z^2 + 11z + 15 = 0. \qquad (E)$$

   a. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z,
   $z^3 + 5z^2 + 11z + 15 = (z+3)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   Déterminer a, b et c.
   b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

2. Le plan complexe est rapporté è un rezpère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
   Les points A, B et D du plan ont pour affixes respectives

$$z_{\text{A}} = -3, \quad z_1 = -1 + 2\text{i} \quad \text{et} \quad z_2 = -1 - 2\text{i}.$$

   a. Simplifier l'expression du quotient $\dfrac{z_1 + 3}{z_2 + 3}$.
   b. En déduire la nature du triangle ABD.
   c. Déterminer l'affixe du point C tel que ABCD soit un carré.

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. (unité 1 cm).

1. Déterminer les racines cubiques dans $\mathbb{C}$ de 216 et les mettre sous forme exponentielle.
   On appelle A, B et C les images de ces racines (on notera A le point dont l'affixe est réelle, et B celui dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
   Placer ces points dans le plan.
2. Soit les points D, E et F d'affixes respectives $3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $-3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $-2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   a. Montrer que D appartient à la droite (AB). Placer D.
   b. Sur quelle droite se trouve E ? Placer E.
   c. Montrer que F appartient à la droite (AC). Placer F.
3. Montrer qu'il existe une similitude directe s unique transformant A en D et B en E et donner son expression complexe.
   Déterminer les éléments caractéristiques de s.
   Vérifier que s transforme C en F.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]-1~;~+\infty[$ par

$$g(u) = \ln(1+u) - \frac{2u}{1+u}.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de g dans un repère orthononné $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité 2 cm).

1. Étudier les variations de g.
2. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en -1 (pour cette dernière limite, on pourra poser $v = 1+u$).
3. Montrer qu'il existe un réel α et un seul dans l'intervalle $[1~;~+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α.
4. Tracer la tangente en O à $(\mathscr{C})$, puis la courbe $(\mathscr{C})$.
5. **a.** Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel u appartenant à $]-1~;~+\infty[$,

$$\frac{u}{1+u} = a + \frac{b}{1+u}.$$

   b. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^t g(u)\,\text{d}u$ où t appartient à $]-1~;~+\infty[$. (on pourra, au cours du calcul, utiliser une intégration par parties).

   c. Montrer que l'aire, exprimée en cm^2, du domaine compris entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $u = 0$ et $u = \alpha$ est égale à $\dfrac{4\alpha(\alpha-3)}{\alpha+1}$.
   En utilisant 3., donner un encadrement de cette aire.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^{-x}\ln\left(1+\text{e}^{2x}\right).$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$ et comparer les signes de $f'(x)$ et de $g\left(\text{e}^{2x}\right)$.
   Préciser, en fonction de αa, la valeur de x pour laquelle $f'(x) = 0$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on pourra poser $t = \text{e}^{2x}$).
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra utiliser l'égalité $1+\text{e}^{2x} = \text{e}^{2x}\left(1+\text{e}^{-2x}\right)$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Montrer que le maximum de f est égal à $\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$.
   Donner une valeur approché de ce maximum en utilisant la valeur approchée par excès de α trouvée en partie A 3.
6. Tracer la courbe représentative de f dans un repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).