Baccalauréat ES Polynésie juin 1997

Exercice 1 **4 points**

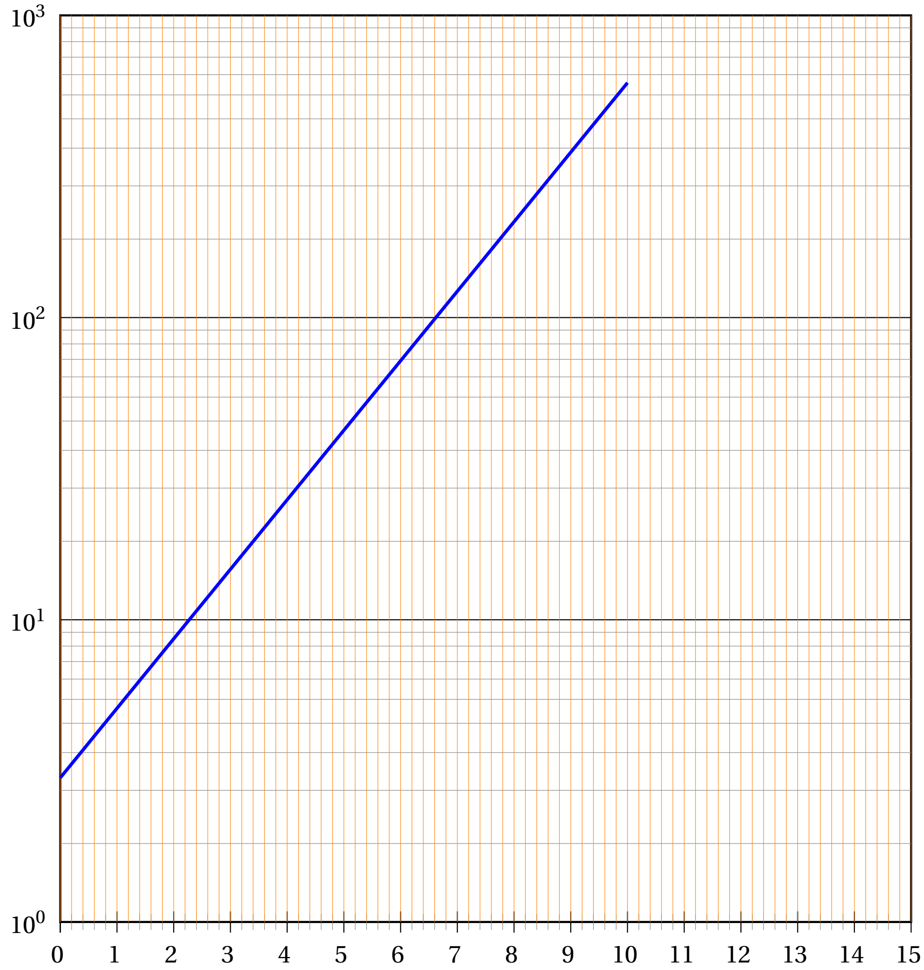
Soit G une grandeur économique définie en fonction du temps t, exprimé en années, par :

$$G(t) = 3 \times (1,7)^t.$$

1. Quelle est la valeur de G à l'instant $t = 0$?
2. Montrer que le rapport : $\tau = \dfrac{G(t+1) - G(t)}{G(t)}$ est constant.
3. Exprimer $\ln G(t)$ en fonction de t (ln désigne la fonction logarithme népérien).
4. Dans le tracé ci-joint, on a représenté la fonction G dans un plan P rapporté à un repère semi-logarithmique pour $t \in [0 ; 10]$.

   Pourquoi la fonction G a-t-elle pour représentation graphique une droite Δ ?

   Exprimer en fonction de τ le coefficient directeur de cette droite.



Exercice 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

La cote d'une voiture d'occasion est donnée dans le tableau suivant :

Année de mise en circulation	1991	1992	1993	1994	1995
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Cote y_i	42 900 F	54 200 F	64 100 F	81 600 F	102 000 F

1. Le plan est muni d'un repère orthogonal. Les unités graphiques sont : en abscisses : 2 cm pour un an ; en ordonnées : 1 cm pour 10 000 F.
Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ (fig. 1).

2. Les points n'étant pas parfaitement alignés, on pose :

$$z = \ln y.$$

a. Recopier et compléter le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
$z_i = \ln y_i$					

Les valeurs de z_i seront données sous forme décimale approchée à 10^{-2} *près par défaut.*

b. On rapporte le plan à un nouveau repère orthogonal.
Les unités graphiques sont désormais :
en abscisses : 2 cm pour un an ; en ordonnées : 1 cm pour 0,1.
Représenter le nuage de points $N_i\left(x_i\ ;\ z_i\right)$ (fig. 2).
(*Dans la suite, le détail des calculs n'est pas demandé*).

c. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z. Un ajustement affine est-il justifié ?

d. Donner une équation de la droite de régression D de z en x. (On arrondira les coefficients à 10^{-2} par défaut.)
Représenter D sur la figure 2.

e. Calculer la valeur de z donnée par l'équation précédente pour l'année 1988. En déduire une estimation de la cote de cette voiture de l'année 1988. (On donnera une valeur arrondie à 100 F près.)

Exercice 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Une étude statistique effectuée par une librairie montre que 30 % des livre qu'elle vend sont primés, c'est-à-dire distingués par un prix littéraire ; 15 % sont des livres reliés.
Pour chaque question, on donnera le résultat exact, puis une valeur approchée à 10^{-2} *près par défaut*

1. Un client achète un livre.
La probabilité pour qu'il soit relié, sachant qu'il est primé, est égale à $0,2$.

a. Calculer la probabilité p_1 pour qu'il soit relié et primé.

b. Calculer la probabilité p_2 pour qu'il soit primé, sachant qu'il est relié.

2. Un client achète cinq livres. On suppose que les choix de ces livres sont indépendants.

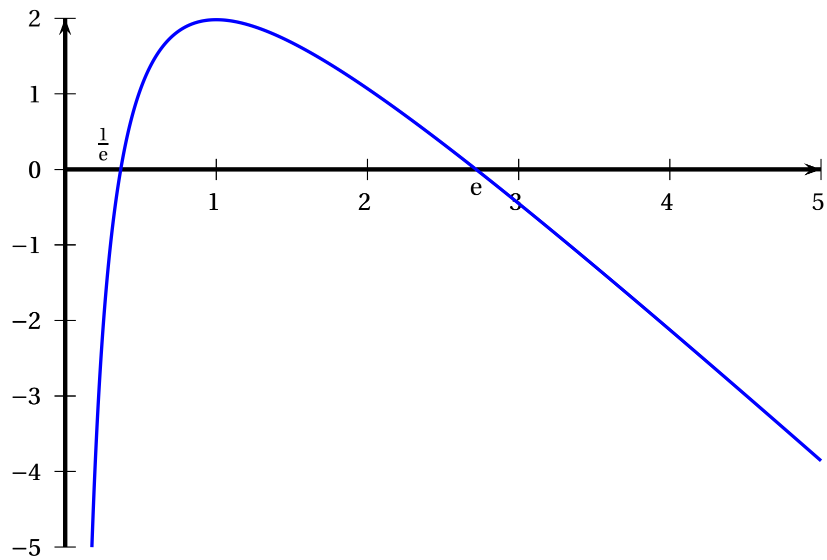
a. Quelle est la probabilité p_3 pour qu'exactement trois d'entre eux soient des livres primés ?

b. Quelle est la probabilité p_4 pour que, parmi ces cinq livres, l'un aumoins soit un livre primé ?

Problème **5 points**

Partie A

Soit f une fonction définie sur $[0\,;\,5]$, dérivable sur $]0\,;\,5]$. Sa fonction dérivée f' est représentée graphiquement ci-après.



1. Déterminer graphiquement le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0\,;\,5]$.

2. On donne :

$$f(0) = \frac{2-\text{e}}{1-\text{e}},\; f\left(\frac{1}{\text{e}}\right) = -\frac{2}{\text{e}},\; f(\text{e}) = 2,\; f(1) = 0.$$

a. Construire le tableau de variation de f.

b. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel α dans $\left]\frac{1}{\text{e}}\,;\,\text{e}\right[$ tel que :

$$f(\alpha) = 0.$$

Désormais, on supposera que $\alpha = 1$.

c. étudier le signe de $f(x)$ pour $x \in \left[\frac{1}{\text{e}}\,;\,\text{e}\right]$.

d. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du plan définie par :

$$\frac{1}{\text{e}} \leqslant x \leqslant \text{e} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f'(x).$$

Donner le résultat exact, puis le résultat arrondi à 10^{-2} près.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{2}{\text{e}}\,;\,2\right]$ par

$$g(x) = \ln(1+x),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. étudier ses variations et dresser son tableau de variation.

2. Soit h la fonction composée de g et de f : $h = g \circ f$.

On étudie h sur l' intervalle $\left[\dfrac{1}{\text{e}}\ ;\ \text{e}\right]$.

a. Calculer $h(\text{e}), h(1), h\left(\dfrac{1}{\text{e}}\right)$.

On donnera les valeurs exactes, puis les valeurs arrondies à 10^{-2} près.

b. Déterminer le sens de variation de h.

c. Justifier que :

$$h'(x) = \frac{f'(x)}{1 + f(x)}.$$

Calculer $h'(\text{e})$, $h'\left(\dfrac{1}{\text{e}}\right)$.

d. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de h, dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 5 cm).

On représentera en particulier les points d'abscisses e, 1, et $\dfrac{1}{\text{e}}$ et les tangentes en ces points.

On pourra résumer les résultats de cette partie dans le tableau suivant :

x	$\dfrac{1}{\text{e}}$	1	e
$h(x)$			
$h'(x)$		1,8	
Nom du point de $\mathscr{C}$	A	B	C