Baccalauréat ES Polynésie juin 2000

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un client désirant louer une voiture auprès de la société ALIZÉ doit formuler sa demande en précisant deux critères :
- la puissance du véhicule : il a le choix entre deux catégories A ou B ;
- l'équipement : voiture climatisée ou non climatisée.

Une étude statistique portant sur un grand nombre de clients a permis d'établir que 60 % des clients louent une voiture de catégorie A et que, parmi eux, 20 % désirent la climatisation. En revanche, 60 % des clients préférant la catégorie B optent pour la climatisation.

1. Traduire à l'aide d'un arbre pondéré la situation décrite ci-dessus.
2. Dans cette question, on donnera des résultats numériques exacts. On choisit au hasard un client et on définit les évènements suivants :
   « Le client a choisi une voiture de catégorie A climatisée »
   « Le client a choisi une voiture climatisée ».
   a. Déterminer la probabilité de ces évènements.
   b. Quelle est la probabilité pour que la voiture choisie soit de catégorie A, sachant qu'elle est climatisée ?
3. On suppose que le nombre des clients est suffisamment important pour que la probabilité de choisir une voiture climatisée de catégorie A soit, pour chacun d'eux, celle obtenue à la question 2 et que leurs choix sont indépendants les uns des autres. On choisit au hasard trois clients.
   Soit X le nombre de voitures de catégorie A climatisées louées par ces trois clients.
   a. Montrer que la probabilité de l'évènement $[X = 3]$ est $(0,12)^3$.
   b. Déterminer la probabilité de l'évènement $[X = 0]$ et en donner l'arrondi à deux décimales.
   c. Déterminer la probabilité de l'évènement « Au moins un des clients a choisi une voiture de catégorie A climatisée » et en donner l'arrondi à deux décimales.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Tous les résultats pourront être obtenus à l'aide de calculatrice sans justification seront arrondis à deux décimales.
Chaque trimestre l'INSEE publie la moyenne annuelle des quatre derniers indices trimestriels du coût de la construction des immeubles à d'habitation (base 100 au 4^{e} trimestre 1953). Le tableau suivant donne ces moyennes pour les premiers trimestres des années 1995 à 1999.

Année	1995	1996	1997	1998	1999
rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
moyenne des indices y_i	1 017	1 024,5	1 038	1 063,25	1 065

(*Source : INSEE*)

1. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. Un ajustement affine est-il envisageable ? Expliquer pourquoi.
2. Donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés.
3. En supposant que l'évolution se poursuive de la même façon, estimer la moyenne des indices prévisible au 1er trimestre 2000.

4. Monsieur Dupont loue à monsieur Lejeune, 3 000 F par mois, un studio à compter du 1er août 1999. Le contrat prévoit une révision annuelle des loyers au 1er août : les loyers sont proportionnels aux moyennes des indices du coût de la construction du premier trimestre de l'année (la moyenne des indices correspondant au loyer initial est 1 065).

   Le propriétaire envisage de fixer le loyer à 3 060 F à compter du 1er août 2000. Cette augmentation serait-elle conforme au contrat si l'on tient compte de la moyenne des indices obtenue à la question 3 ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Madame X décide de verser 5 000 F, chaque année, le 31 décembre, sur un compte en assurance-vie, à partir de l'année 1999. Toutes les sommes déposées sont rémunérées au taux annuel de 5 %, à intérêts composés, ce qui signifie que chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital le 31 décembre et produisent à leur tour des intérêts.
On désigne par C_n(n entier positif ou nul) le capital, exprimé en francs, dont Madame X dispose sur son compte au 1er janvier de l'année $(2000+n)$. On a donc $C_0 = 5000$.

1. **a.** Montrer que le capital acquis au 1er janvier 2001 est 10 250 F.
   b. Établir que, pour tout entier n positif ou nul : $C_{n+1} = 1,05C_n + 5000$.
2. **a.** On pose $u_n = C_n + 100000$, pour n entier positif ou nul. Établir une relation entre u_{n+1} et u_n. En déduire que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   b. Exprimer (u_n) en fonction de n.
   c. Montrer que $C_n = 105000(1,05)^n - 105000$.
   d. En quelle année le capital acquis dépasse-t-il 200 000 F pour la première fois ?
3. On pose $S = 5000 + 5000(1,05) + 5000(1,05)^2 + \ldots + 5000(1,05)^{19} + 5000(1,05)^{20}$.
   Calculer la valeur exacte de S et montrer que $S = C_{20}$.

PROBLÈME **10 points**

On considère la fonction numérique f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 2\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

et on note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

A. Étude de f sur $[0 ; +\infty[$

1. Justifier que $f(x) = x + 2 - \dfrac{4}{e^x + 1}$ puis déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
   Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D).
3. On désigne par M le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse x et N le point de (D) de même abscisse x. La distance entre les points M et N est le nombre $MN = \dfrac{4}{e^x + 1}$. Résoudre l'inéquation $MN < 10^{-1}$.
4. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet dans l'intervalle $[0 ; 1]$ une solution unique x_0 dont on déterminera un encadrement à 10^{-1} près.

B. Représentation de la courbe ($\mathscr{C}$)

1. Donner le coefficient directeur de la tangente (T) à ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 0.
2. Tracer (T), (D) et la partie de la courbe ($\mathscr{C}$) correspondant aux points dont l'abscisse appartient à $[0~;~4]$. Faire figurer le point de la courbe d'abscisse x_0 sur le schéma.

C. Primitive de f

1. Soit g la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

   a. Déterminer une primitive G de g sur $[0~;~+\infty[$.

   b. Vérifier que $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1} = 1 - g(x)$ sur $[0~;~+\infty[$.

2. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en cm^2, de la portion du plan délimitée par ($\mathscr{C}$), la droite (D) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis en donner l'arrondi à deux décimales.