Baccalauréat ES Polynésie juin 2002

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne l'évolution du prix d'un paquet de café en francs au 31 décembre de l'année $1900+n$.

Rang n_i de l'année	70	80	88	94	96	98	99	100
Prix y_i en francs	3	5,5	10	15,50	19,30	19,40	20	21

Sauf autre précision, tous les résultats et coefficients demandés seront arrondis à 10^{-3}.

A – Ajustement affine

Le détail des calculs n'est pas demandé.

1. **a.** Représenter graphiquement le nuage. Que peut-on en déduire ?

   b. Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement affine de y en n.
2. En supposant que ce modèle mathématique reste valable jusqu'à l'an 2002, donner une estimation du prix, en euros, arrondi au centime, d'un paquet de café au 31/12/2002. On rappelle qu'un euro vaut 6,559 57 francs.

B – Ajustement exponentiel

1. Le détail des calculs n'est pas demandé.

   a. Recopier et compléter le tableau suivant où $z_i = \ln y_i$ (valeurs arrondies à 10^{-3}).

n_i	70	80	88	94	96	98	99	100
z_i	1,099	1,705	2,303		2,960			

   b. Représenter graphiquement le nuage. Que peut-on en déduire ?

   c. Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement affine de z en n.
2. Déduire du **B 1 c** une expression de y en fonction de n de la forme $y = \alpha \cdot \beta^n$.
   Cet ajustement est dit exponentiel.
3. En supposant que ce modèle exponentiel reste valable jusqu'en 2002, donner une estimation du prix en euros, arrondi au centime, d'un paquet de café au 31/12/2002.
4. Quelle est la meilleure estimation du prix au 31/12/2002 d'un paquet de café ? Justifier.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Un jeu consiste à lancer une première fois un dé à six faces :
- si le joueur obtient un « six », il gagne 10 euros ;
- s'il obtient un « un », un « deux » ou un « trois », il ne gagne rien et le jeu s'arrête ;
- s'il obtient un « quatre » ou un « cinq », le joueur lance le dé une deuxième fois ;
- s'il obtient un « six », il gagne alors 5 euros, sinon il ne gagne rien et le jeu s'arrête.

Pour participer à ce jeu, chaque joueur mise 2 euros.
Le « gain » d'un joueur est la différence entre ce qu'il reçoit à l'issue de la partie et sa mise ; un gain peut donc être négatif. Soit G le gain d'un joueur donné à chaque partie.

1. Quelles sont les valeurs prises par G ?
2. Premier cas : le joueur joue avec un dé bien équilibré.
   a. Montrer que $p(G = 3) = \dfrac{1}{18}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
   b. Déterminer la loi de probabilité de G, puis l'espérance mathématique de G. Ce jeu est-il à l'avantage du joueur ?
3. Deuxième cas : le joueur joue avec un dé pipé.
   On note p_i la probabilité d'obtenir la face marquée « i » pour $1 \leqslant i \leqslant 6$.
   On sait que p_6 est le double de p_1 et que $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$.
   a. Déterminer les valeurs de p_i pour $1 \leqslant i \leqslant 6$.
   b. Montrer alors que $p(G = 3) = \dfrac{4}{49}$
   c. Déterminer la loi de probabilité de G.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Le conseil municipal d'une station touristique de montagne a décidé de faire équiper une falaise afin de créer un site d'escalade.
L'équipement doit se faire depuis le pied de la falaise. Deux entreprises spécialisées dans ce genre de chantier ont été contactées et ont envoyé des devis.
On se propose d'étudier ceux-ci.

Devis de l'entreprise A :

Le premier mètre équipé coûte 20 €, puis chaque mètre supplémentaire équipé coûte 4 € de plus que le mètre précédent (20 € pour équiper une falaise de un mètre, 20 € + 24 € = 44 € pour équiper une falaise de deux mètres, 20 € + 24 € + 28 € = 72 € pour une falaise de trois mètres, etc.)

Devis de l'entreprise B :

Le premier mètre équipé coûte 10 €, puis chaque mètre supplémentaire équipé coûte 5 % de plus que le mètre précédent (10 € pour équiper une falaise de un mètre, 10 € + 10,50 € = 20,50 € pour équiper une falaise de deux mètres, 10 € + 10,5 € + 11,025 € = 31,525 € pour une falaise de trois mètres, etc.).

On appelle u_n le prix du n-ième mètre équipé et S_n le prix de l'équipement d'une falaise de n mètres de hauteur indiqués par l'entreprise A.
On appelle v_n le prix du n-ième mètre équipé et R_n le prix de l'équipement d'une falaise de n mètres de hauteur indiqués par l'entreprise B.

1. Exprimer u_n puis S_n en fonction de n.
2. Exprimer v_n puis R_n en fonction de n.
3. Calculer le prix à payer pour équiper une falaise de 50 mètres de hauteur avec chacune des deux entreprises. Préciser l'entreprise la moins chère. On arrondira les prix à l'euro près.
4. Le conseil municipal a décidé d'accorder un budget de 24 000 € pour équiper ce site. Calculer la hauteur de la falaise qui peut être équipée avec cette somme par chacune des deux entreprises A et B (arrondir au mètre près).

PROBLÈME **10 points**

Partie A – Étude d'une fonction

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $\text{I} = [0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 0,4x + \mathrm{e}^{-0,4x+1}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm en abscisse, 4 cm en ordonnée).

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 0,4x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
   c. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (D).
2. **a.** Résoudre sur l'intervalle I l'inéquation suivante :

$$1 - \mathrm{e}^{-0,4x+1} > 0.$$

   b. À l'aide de la question précédente, étudier les variations de la fonction f sur I.
   c. Dresser le tableau de variations de f. En déduire le signe de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. **a.** Montrer que la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0 passe par le point B(2,5 ; 1).
   b. Construire $(\mathscr{C})$, (D) et (T).

Partie B - Application économique

Soit x le nombre d'objets, exprimé en centaines, fabriqués par une usine, $f(x)$ est leur coût total, exprimé en milliers d'euros, On suppose que x appartient à l'intervalle J = $[2,5\,;\,+\infty[$.
Chaque objet est vendu 5 euros pièce.
On suppose que la fabrication est vendue dans sa totalité.

1. **a.** Exprimer la recette $R(x)$, en milliers d'euros, en fonction du nombre x de centaines d'objets fabriqués.
   b. Construire, sur le graphique précédent, la courbe représentative (Δ) de la fonction R traduisant cette recette.
   c. Vérifier graphiquement que (Δ) et $(\mathscr{C})$ se coupent en un seul point, On désigne par α l'abscisse de ce point ; en donner une valeur approchée à 10^{-1}.
2. **a.** Montrer que le bénéfice, noté $B(x)$, s'exprime en milliers d'euros par :

$$B(x) = 0,1x - \mathrm{e}^{-0,4x+1}.$$

   b. Quel est, en euros, le bénéfice obtenu en fabriquant 1 000 objets ? On donnera une valeur arrondie à l'euro.
   c. Calculer $B(x)$ et étudier le sens de variation de B sur $[2,5\,;\,+\infty[$.
   d. Démontrer que l'équation $B(x) = 0$ admet une solution unique sur J appartenant à [2,5 ; 10].
   Montrer que cette solution est le nombre α défini dans la question **1 c**.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   e. En déduire le nombre entier minimum d'objets à produire pour réaliser un bénéfice.