Baccalauréat ES Polynésie juin 2006

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre questions de ce Q. C. M., une seule des trois propositions est exacte. Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de la question et la bonne affirmation. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,5 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à* 0.

1. Si la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet :
   - Au moins une solution.
   - Au plus une solution.
   - Exactement une solution.
2. Si la fonction f est continue sur $[a\,;\,b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet :
   - Au moins une solution.
   - Au plus une solution.
   - Exactement une solution.
3. Si la fonction f est continue et positive sur $[a\,;\,b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal, alors l'aire, en unités d'aire $\mathscr{A}$ du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée par la formule :
   - $\mathscr{A} = \displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
   - $\mathscr{A} = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
   - $\mathscr{A} = f(b) - f(a)$.
4. Un produit coûte initialement 500 euros. Son prix augmente de 20 %. Si l'on veut revenir au prix initial, il faut :
   - Diminuer le prix de 20 %.
   - Diminuer le prix de $\dfrac{1}{20}$ %.
   - Diminuer le prix de 100 euros.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire

On sait que la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction numérique f définie sur $]-2\,;\,+\infty[$, passe par les points O(0 ; 0) et A(−1 ; 0), que la tangente à $\mathscr{C}_f$ en O a pour coefficient directeur ln(2) et la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A a pour équation $y = x + 1$.

1. **a.** À l'aide des données ci-dessus, donner la valeur de $f(0)$, de $f'(0)$, de $f(-1)$ et de $f'(-1)$.

   b. Donner une équation de la tangente en O à $\mathscr{C}_f$.
2. On sait de plus qu'il existe des réels a, b et c tels que pour tout $x > -2$:

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\ln(x + 2).$$

   a. Exprimer $f(0)$ à l'aide de a, b et c.

   b. Exprimer $f'(x)$ à l'aide de a, b et c

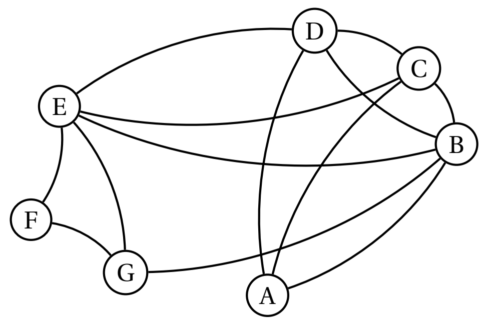
   c. En déduire $f'(0)$ et $f'(-1)$ à l'aide de a, b et c.

d. En déduire les valeurs de a, b et c.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une compagnie aérienne propose des vols directs entre certaines villes, notées A, B, C, D, E, F et G. Cela conduit au graphe $\mathcal{G}$ suivant, dont les sommets sont les villes et les arêtes représentent les liaisons aériennes :



1. Le graphe $\mathcal{G}$ est-il complet ? Quel est l'ordre de $\mathcal{G}$?
2. **a.** Sur les cartes d'embarquement, la compagnie attribue à chaque aéroport une couleur, de sorte que deux aéroports liés par un vol direct aient des couleurs différentes.
   Proposer un coloriage adapté à cette condition.

   b. Que peut-on en déduire sur le nombre chromatique de $\mathcal{G}$?
3. **a.** Quelle est la nature du sous graphe formé par les sommets A, B, C et D ?

   b. Quel est le nombre minimal de couleurs que la compagnie doit utiliser pour pouvoir attribuer une couleur à chaque aéroport en respectant les conditions du 2. ?
4. **a.** En considérant les sommets dans l'ordre alphabétique, construire la matrice M associée à $\mathcal{G}$.

   b. On donne :

$$M^8 = \begin{pmatrix} 6945 & 9924 & 8764 & 8764 & 9358 & 3766 & 5786 \\ 9924 & 14345 & 12636 & 12636 & 13390 & 5486 & 8310 \\ 8764 & 12636 & 11178 & 11177 & 11807 & 4829 & 7369 \\ 8764 & 12636 & 11177 & 11178 & 11807 & 4829 & 7369 \\ 9358 & 13390 & 11807 & 11807 & 12634 & 5095 & 7807 \\ 3766 & 5486 & 4829 & 4829 & 5095 & 2116 & 3181 \\ 5786 & 8310 & 7369 & 7369 & 7807 & 3181 & 4890 \end{pmatrix}$$

   Combien y a-t-il de chemins de longueurs 8 qui relient B à D ?
5. **a.** Pourquoi est-il impossible pour un voyageur de construire un itinéraire qui utilise chaque liaison aérienne une et une seule fois ?

   b. Montrer qu'il est possible de construire un tel itinéraire en ajoutant une seule liaison qui n'existe pas déjà et que l'on précisera.

EXERCICE 3 **5 points**

Une enquête est réalisée auprès des clients d'une compagnie aérienne. Elle révèle que 40 % des clients utilisent la compagnie pour des raisons professionnelles, que 35 % des clients utilisent la compagnie pour des raisons touristiques et le reste pour diverses autres raisons.

Sur l'ensemble de la clientèle, 40 % choisissent de voyager en première classe et le reste en seconde classe.
En fait, 60 % des clients pour raisons professionnelles voyagent en première classe, alors que seulement 20 % des clients pour raisons touristiques voyagent en première classe.
On choisit au hasard un client de cette compagnie. On suppose que chaque client à la même probabilité d'être choisi. On note :

— A l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles »
— T l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons touristiques »
— D l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques »
— V l'évènement « le client interrogé voyage en première classe ».

Si E et F sont deux évènements, on note $p(E)$ la probabilité que E soit réalisé, et $p_F(E)$ la probabilité que E soit réalisé sachant que F est réalisé. D'autre part, on notera $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

1. Déterminer : $p(A)$, $p(T)$, $p(V)$, $p_A(V)$ et $p_T(V)$.

2. **a.** Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons professionnelles.

b. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons touristiques.

c. En déduire la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques.

3. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles sachant qu'il a choisi la première classe.

4. Soit un entier n supérieur ou égal à 2. On choisit n clients de cette compagnie aérienne d'une façon indépendante.
On note p_n la probabilité qu'au moins un de ces clients voyage en seconde classe.

a. Prouver que : $p_n = 1 - 0,4^n$.

b. Déterminer le plus petit entier n pour lequel $p_n > 0,9999$.

EXERCICE 4 **6 points**

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 + x + 1\right)\mathrm{e}^x.$$

Dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm sur chaque axe, on note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique et $\mathscr{C}_{\exp}$ la représentation graphique de la fonction exponentielle.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Donner les valeurs de $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^2\mathrm{e}^x$ et de $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x$.

c. En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$, montrer que

$$f'(x) = (x+1)(x+2)\mathrm{e}^x.$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.

4. **a.** Préciser les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_{\text{exp}}$.

   b. Construire ces deux courbes dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

5. Soit F la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $F(x) = \left(x^2 - x + 2\right)\text{e}^x$.
   Prouver que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

6. **a.** Déterminer la valeur exacte de l'aire en cm^2 du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

   b. Déterminer la valeur exacte de l'aire en cm^2 du domaine $\mathscr{D}'$ délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{\text{exp}}$, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.