

œ Baccalauréat ES Polynésie septembre 1996 œ

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique : 2 cm).

On considère la parabole Π d'équation $y = x^2$, et la droite Δ d'équation $y = 3$.

1. Représenter Π et Δ , quand x appartient à l'intervalle $[-2; +2]$.
2. Calculer l'intégrale $I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x^2 dx$.
3.
 - a. La droite Δ coupe Π en deux points, A, d'abscisse positive, et B, d'abscisse négative.
On note C et D les points de l'axe des abscisses tels que ABCD soit un rectangle.
Dessiner ce rectangle, et calculer son aire, en cm^2 .
 - b. On note P la partie du plan comprise entre le segment [AB] et la parabole Π .
Calculer, en cm^2 , l'aire de P.
 - c. Vérifier que l'aire de P est égale aux deux tiers de l'aire de ABCD.

EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

Un vendeur d'adoucisseurs d'eau a l'intention de proposer deux de ses produits (modèle *simple* et modèle *haut de gamme*) dans un lotissement nouvellement construit. Une enquête a montré que 20 % des foyers se déclarent intéressés par l'achat d'un adoucisseur.

L'expérience du vendeur lui a appris que, parmi les foyers se déclarant intéressés, 50 % achètent le modèle *simple*, 40 % le modèle *haut de gamme*, les autres renonçant finalement à l'achat. On nomme :
I l'évènement : « le foyer est intéressé » ;

A l'évènement : « le foyer achète le modèle *simple* » ;

B l'évènement : « le foyer achète le modèle *haut de gamme* » ;

C l'évènement : « le foyer renonce à l'achat ».

1. Calculer les probabilités des évènements $I \cap A$, $I \cap B$, $I \cap C$.
2. Montrer que la probabilité pour qu'un foyer pris au hasard n'achète pas d'adoucisseur est égale à 0,82.
3. Le vendeur envisage de fixer le prix du modèle *simple* à 4 000 F et celui du *haut de gamme* à 8 000 F.
On appelle X la variable aléatoire correspondant à la somme (éventuellement nulle) versée au vendeur par un foyer visité au hasard.
 - a. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.
 - b. Pour que son bénéfice soit suffisant, l'espérance de gain du vendeur devrait être de 1 300 F pour un foyer visité. S'il veut vendre le modèle *simple* à moitié prix du modèle *haut de gamme*, comment doit-il modifier ses prix?

EXERCICE 2

5 points

Enseignement de spécialité

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 7$ et, pour tout entier naturel n , par

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 6}{5}.$$

1. Calculer u_1 , u_2 , u_3 .

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $v_n = u_n - 2$.
- Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - Exprimer v_n en fonction de n , et en déduire que : $u_n = 5\left(\frac{2}{5}\right)^n + 2$
 - Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

PROBLÈME**11 points****Partie A**

La fonction g est définie, sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right]$, par :

$$g(x) = \frac{2x}{e} - 1 - \ln x.$$

- Calculer $g'(x)$, où g' désigne la fonction dérivée de g . Étudier son signe, et, en déduire le sens de variation de g .
 - Calculer la limite de g lorsque x tend vers $+\infty$. (On pourra écrire : $g(x) = x\left[\frac{2}{e} - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right]$).
 - Calculer $g\left(\frac{1}{e}\right)$ et $g\left(\frac{e}{2}\right)$.
 - Dresser le tableau de variation de g .
- Calculer $g(e)$ et justifier que $g(x) \geq 0$ pour $x \geq e$.
 - Montrer que g s'annule sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}; \frac{e}{2}\right]$ pour une valeur unique que l'on notera α . Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
- Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 4 cm sur l'axe des ordonnées).
 - Tracer la courbe représentative Γ de la fonction g . Placer, en particulier, les points d'abscisses α et e .
 - Résoudre graphiquement l'inéquation : $g(x) \geq 0$.

Partie B

La fonction f est définie, sur $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right]$, par :

$$f(x) = \frac{x^2}{e} - x \ln x.$$

- Vérifier que $f'(x) = g(x)$.
En déduire le tableau de variation de f .
- Justifier que f est positive ou nulle sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right]$. On ne demande pas de représenter graphiquement f .

Partie C

La fonction g représente le chiffre d'affaires marginal d'une entreprise, en fonction du nombre de ses employés. C'est la dérivée de la fonction correspondant au chiffre d'affaires exprimé en francs. Déterminer ce chiffre d'affaires, sachant qu'il est nul pour un employé.