Baccalauréat ES Polynésie septembre 1999

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise peint des jouets. Pour cela, elle utilise deux machines M_1 et M_2. La machine M_1 peint un quart de la production.
On sait que la machine M_1 peint correctement un jouet avec une probabilité de 0,85 alors que la machine M_2, plus récente, le fait avec une probabilité de 0,95.
Tous les jouets sont mélangés puis acheminés ensemble vers l'unité d'emballage.
On choisit alors un jouet au hasard, tous les choix étant équiprobables.
On note : A_1 l'évènement : « le jouet est peint par M_1 »
A_2 l'évènement : « le jouet est peint par M_2 »
B l'évènement : « le jouet est peint correctement ».

1.
   a. Représenter par un arbre pondéré la situation décrite.
   b. Définir par une phrase l'évènement $A_1 \cap B$.
   c. Calculer la probabilité de l'évènement $A_1 \cap B$.
   d. Montrer que la probabilité de l'évènement B, notée p, est égale à $0,925$.
   e. Le jouet choisi est peint correctement.
   Quelle est la probabilité pour qu'il ait été peint par la machine M_1 ?
2. *Dans cette question, on donnera les résultats arrondis à* 10^{-2} *près.*
   On choisit maintenant au hasard et de façon indépendante 4 jouets.
   a. Quelle est la probabilité pour que les 4 jouets soient peints correctement ?
   b. Quelle est la probabilité pour qu'un jouet au moins ne soit pas peint correctement ?

EXERCICE 2 **5 points**

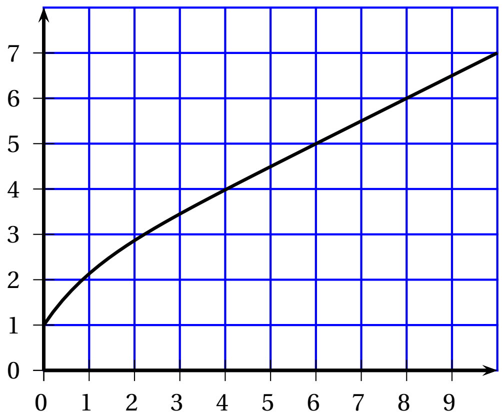
On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, croissante sur cet intervalle et telle que sa représentation graphique notée $\mathscr{C}_f$ est donnée par le graphique 1 sur la feuille annexe.
La feuille annexe est à remettre avec la copie, en mettant en évidence sur les graphiques toutes les constructions utilisées.

1. Les graphiques 2 et 3 donnent les représentations graphiques de la fonction $g = \ln f$ et de la fonction f' dérivée de f.
   Préciser quelle courbe est donnée par chacun des graphiques 2 et 3 avec les justifications nécessaires.
2. On sait que $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 2 - h(x)$ où h est une fonction définie et strictement négative sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, telle que la limite de h en $+\infty$ est égale à 0. Interpréter graphiquement les renseignements donnés sur h.
3. Quel graphique de l'annexe 1 permet de déterminer l'abscisse x_0 du point de la courbe $\mathscr{C}_f$ où la tangente a pour coefficient directeur 0,6 ?
   Indiquer parmi les intervalles suivants celui auquel appartient x_0 :

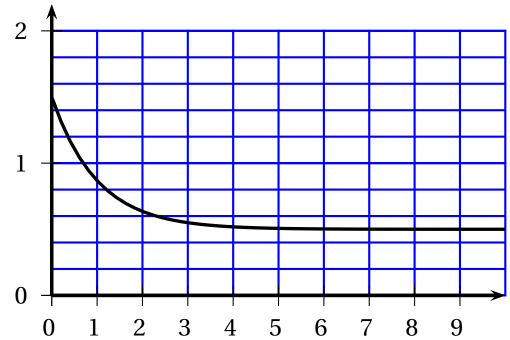
$$I_1 = [0~;~1] \quad ; \quad I_2 = [1~;~4] \quad ; \quad I_3 = [4~;~7].$$

4. On considère l'intégrale I définie par $I = \displaystyle\int_4^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   À l'aide de la représentation graphique de f trouver, en expliquant la démarche utilisée, un nombre entier n tel que $n < I < n+1$.

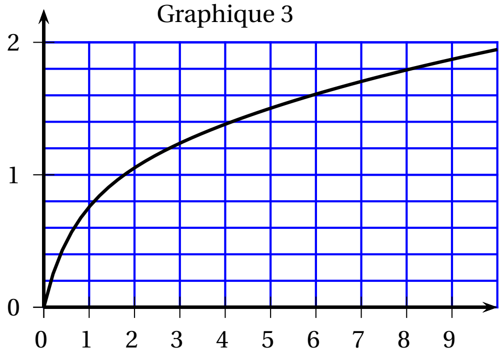
Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3



PROBLÈME **10 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = -(\ln x)^2 + 4\ln x - 3.$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de f est donnée en fin d'énoncé.

Partie A

1.

a. Déterminer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. (On pourra mettre $\ln x$ en facteur dans l'expression $f(x)$).

c. f' étant la fonction dérivée de f, montrer que $f'(x) = \dfrac{4 - 2\ln x}{x}$.

d. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - 4X + 3 = 0$ et déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.

b. En déduire par lecture graphique les valeurs de x telles que $f(x) > 0$.

3.

a. Interpréter graphiquement le nombre $A = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

b. Soit h la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = -x\left[(\ln x)^2 - 6\ln x + 9\right]$.
Déterminer la dérivée h' de h et en déduire une primitive F de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

c. En déduire la valeur exacte de A.

Partie B

Une entreprise constate que la vente de sa production dégage un bénéfice moyen par objet (en milliers de francs) égal à : $(\ln x)^2 - 4\ln x + 3$ où x désigne le nombre de milliers d'objets fabriqués. Ce bénéfice moyen par objet n'est pas toujours positif.

1. Calculer le bénéfice total de l'entreprise pour une production de 1 000 objets puis de 3 000 objets. Indiquer, dans chaque cas, si l'entreprise fait un bénéfice positif.
2. Déduire de la partie A pour quelles quantités d'objets produits l'entreprise fait un bénéfice positif.