# Baccalauréat ES Polynésie septembre 2001

**EXERCICE 1** **5 points**

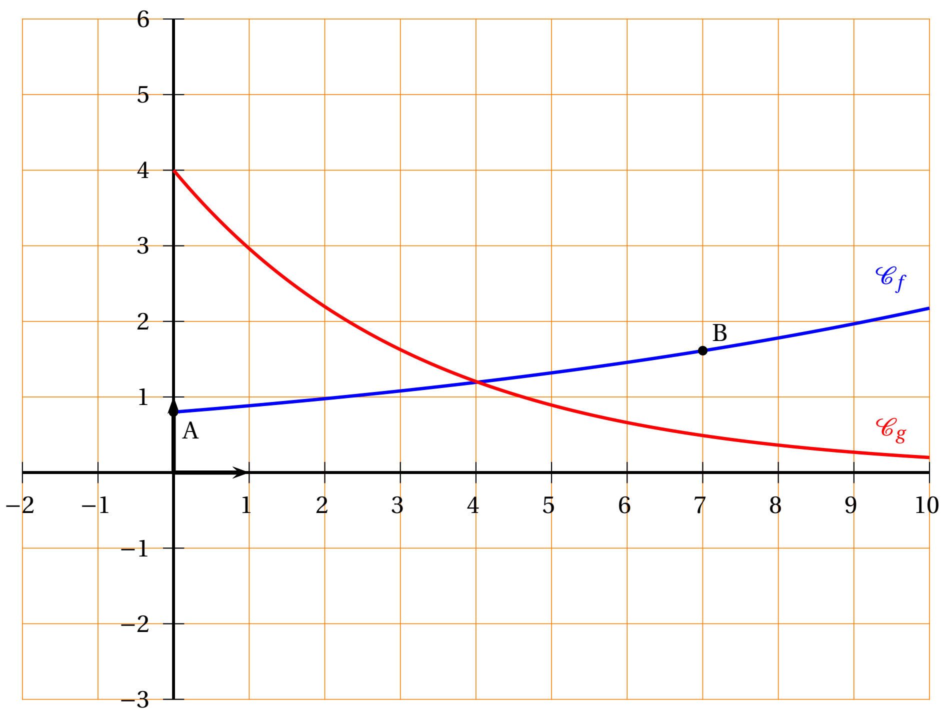
**Commun à tous les candidats**

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Sur le graphique ci-après, la courbe $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction $f$ définie sur $[0\,;\,10]$ par :

$$f(x) = k\text{e}^{ax}, \text{où } a \text{ et } k \text{ sont deux constantes réelles.}$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points A et B de coordonnées : A $(0\,;\,0{,}8)$ et B $(7\,;\,1{,}6)$.
La courbe $\mathcal{C}_g$ est la courbe représentative de la fonction $g$ définie sur $[0\,;\,10]$ par :

$$g(x) = 4\text{e}^{-0{,}3x}.$$




1. **a.** Déterminer les nombres $a$ et $k$ à $10^{-1}$ près.

   **b.** Justifier le sens de variation de $g$.

   **c.** Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ dans $[0\,;\,10]$.

2. Dans une étude de marché, pour un produit donné, on a modélisé l'offre par la fonction $f$ et la demande par la fonction $g$ en fonction du prix unitaire $x$ par :

$$f(x) = 0{,}8\text{e}^{0{,}1x} \quad \text{et} \quad g(x) = 4\text{e}^{-0{,}3x}.$$

   Le prix d'équilibre correspond à la solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

   **a.** Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ dans $[0\,;\,10]$.

   **b.** Donner la valeur approchée, notée $x_e$ à $10^{-1}$ près par défaut du prix d'équilibre.

3. **a.** Pour $x$ appartenant à $[0\,;\,9]$ montrer que le quotient $\dfrac{f(x+1) - f(x)}{f(x)}$ est constant.

   On donnera une valeur exacte, puis une valeur approchée à $10^{-2}$ près par défaut.

**b.** En déduire le taux d'accroissement, exprimé en pourcentage, de l'offre quand le prix unitaire augmente d'une unité.

**4.** Le prix est fixé égal au prix $x_e$. On augmente ce prix de 1 %; déterminer alors le pourcentage $t$ % de variation de la demande (on donnera un arrondi de $t$ à $10^{-1}$).

**EXERCICE 2** **5 points**
**Enseignement obligatoire**

Une maison d'édition a ouvert le 1er janvier 2002, sur Internet, un site de vente par correspondance. Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de livres vendus par mois en milliers.

| Mois | janvier 2002 | janvier 2003 | juillet 2003 | janvier 2004 | avril 2004 |
|---|---|---|---|---|---|
| Rang du mois $x_i$ | 1 | 13 | 19 | 25 | 28 |
| Nombre de livres en milliers $y_i$ | 1,2 | 2,5 | 3,5 | 5,1 | 6 |

**1.** Représenter le nuage de points $\left(x_i\ ;\ y_j\right)$ dans un repère (unités graphiques : 1 cm représente deux mois en abscisse et 1 cm représente 500 livres en ordonnée).

**2.** L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel plutôt qu'un ajustement affine. Pour cela, on pose $z_i = \ln\left(y_i\right)$.
Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant où $z_i$ est arrondi à $10^{-3}$.

| Rang du mois $x_i$ | 1 | 13 | 19 | 25 | 28 |
|---|---|---|---|---|---|
| $z_i = \ln\left(y_i\right)$ | | | 1,253 | | |

**3.** *Dans cette question, les résultats numériques pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice, sans justification.*
Écrire une équation de la droite d'ajustement affine D de $z$ en $x$ par la méthode des moindres carrés, (les coefficients seront arrondis à $10^{-2}$).

**4.** Déduire de la question précédente une relation entre $y$ et $x$ de la forme $y = a\mathrm{e}^{kx}$.
Les coefficients $a$ et $k$ seront arrondis à $10^{-2}$.

**EXERCICE 2** **5 points**
**Enseignement de spécialité**

On considère un groupe de 500 villes d'un pays.
Chaque année les impôts locaux d'une ville peuvent augmenter ou ne pas augmenter.
$n$ étant un entier naturel, on note :

- $a_n$ la probabilité qu'une ville ait augmenté les impôts locaux l'année $n$;
- $b_n$ la probabilité qu'une ville n'ait pas augmenté les impôts locaux l'année $n$;
- $P_n$ la matrice $(a_n \quad b_n)$ traduisant l'état probabiliste à l'année $n$.

On a constaté statistiquement que tous les ans :

- 20 % des villes qui ont augmenté les impôts l'année précédente les augmentent l'année suivante;
- 90 % des villes qui n'ont pas augmenté les impôts l'année précédente les augmentent l'année suivante.

**1.** **a.** Chaque année, une ville peut être à l'état A « les impôts locaux ont augmenté » ou à l'état B « les impôts locaux n'ont pas augmenté ».
Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.
Exprimer $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ en fonction de $a_n$ et $b_n$.

**b.** Vérifier que la matrice $M$ de ce graphe est $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$

2. On a constaté qu'en 2002, les impôts locaux ont été augmentés dans 300 villes et n'ont pas été augmentés dans 200 villes.

   On note $a_0$ et $b_0$ les fréquences correspondantes.

   **a.** Déterminer l'état initial $P_0 = (a_0 \quad b_0)$.

   **b.** Calculer $P_1$. En déduire le nombre de villes qui augmenteront les impôts en 2003 et le nombre de celles qui ne les augmenteront pas en 2003.

3. On rappelle que, pour tout entier naturel $n$ :

$$a_n + b_n = 1 \quad \text{et} \quad P_{n+1} = P_n \times M.$$

   Exprimer $a_{n+1}$ en fonction de $a_n$.

4. Soit $P = (x \quad y)$ l'état stable. Expliquer ce que représentent $x$ et $y$ et déterminer $x$ et $y$ en utilisant les résultats précédents.

**PROBLÈME** **10 points**

**Partie A**

On considère la fonction $f$ définie sur $[1\,;\,12]$ par

$$f(x) = \frac{5\ln x}{x^2}.$$

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{5(1-2\ln x)}{x^3}$.
2. En déduire les variations de $f$ sur $[2\,;\,10]$ puis dresser le tableau de variations de $f$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet une solution unique sur $[2\,;\,10]$ notée $\alpha$ puis donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.

**PARTIE B**

Une ville décide de promouvoir les déplacements à vélo afin de lutter contre la pollution et a acheté un parc de 1 000 vélos qu'elle loue à la journée. On constate que la demande est fonction du prix de location et que cette demande est modélisée par la fonction $f$ donnée ci-dessus dans la partie A définie sur $[2\,;\,10]$ où $x$ désigne le prix de location d'un vélo pour la journée et $f(x)$ la demande en milliers de vélos.

1. En utilisant la partie A, indiquer le prix à partir duquel la demande sera inférieure à 500 vélos.

   On donnera la valeur au centime d'euro près.
2. On suppose que le prix de location est fixé à 3 euros. Calculer le pourcentage de variation de la demande à $10^{-2}$ près lorsque le prix augmente de 0,03 euros.
3. Le pourcentage de variation de la demande lorsque le prix augmente de 1 % est appelé « élasticité de la demande par rapport au prix ».

   On admet qu'une valeur approchée de ce nombre est $x\dfrac{f'(x)}{f(x)}$. On note $\text{E}(x) = x\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

   **a.** Montrer que $\text{E}(x) = \dfrac{1-2\ln(x)}{\ln(x)}$.

   **b.** Calculer E(3) arrondi à $10^{-2}$. Comparer ce résultat avec celui de la question 2.

**PARTIE C**

1. Calculer la recette lorsque le prix est égal à 3 € (on donnera le résultat à l'euro près).

2. Exprimer en euros la recette $R(x)$ en fonction du prix $x$.
3. Montrer que $R'(x) = 5\,000 \times \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

   Étudier les variations de $R$ sur $[2\,;\,10]$.
4. En déduire le prix de location permettant d'obtenir la recette maximum et déterminer cette recette maximum.

   Le prix de la location sera arrondi au centime d'euro près et la recette à l'euro près.