∽ Baccalauréat ES Polynésie septembre 2002 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

On peut traiter la question 4 *sans avoir traité les questions précédentes.*

Pour un achat immobilier, lorsqu'une personne emprunte une somme de 50 000 euros, remboursable par n mensualités chacune égale à A euros, pour un intérêt mensuel de 0,4 %, le montant de cette mensualité A est donné par :

$$A = \frac{200}{1-(1,004)^{-n}}$$

(*on ne demande pas d'établir cette relation*).

1. Calculer la mensualité A lorsque cette personne emprunte 50 000 euros remboursables par 120 mensualités pour un intérêt mensuel de 0,4 %. On donnera une valeur arrondie au centime d'euro.

Calculer alors le montant total des intérêts pour ce prêt.

2. Mêmes questions avec un emprunt de 50 000 euros sur 8 ans à 0,4 % mensuel.

3. Afin de payer le moins d'intérêts possible, l'emprunteur doit augmenter le montant de la mensualité et diminuer la période de remboursement. Mais il ne peut supporter au maximum que des remboursements de 950 euros par mois.

a. Résoudre dans $[0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation

$$\frac{200}{1-(1,004)^{-x}} \leqslant 950.$$

b. En déduire le nombre entier n minimum de mensualités pour lequel le montant de la mensualité A est inférieur ou égal à 950 euros.

Que vaut alors A arrondi au centime d'euro ? Calculer alors le montant total des intérêts.

4. Voici des extraits du tableau d'amortissement d'un prêt de 50 000 euros remboursable par 60 mensualités pour un intérêt de 0,4 %.

Calculer, en détaillant, les nombres a, b, c, d et e qui figurent dans le tableau.

On donnera des valeurs arrondies au centime d'euro.

N° de la mensualité	Montant de la mensualité en euros	Part des intérêts en euros pour cette mensualité	Capital amorti en euros	Capital restant à rembourser en euros
1	938,99	200,00	738,99	49 261,01
2	938,99	197,04	a	b
3	938,99	c	d	e
4	938,99	191,10	747,89	47 026,26
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
59	938,99	7,47	931,52	935,25
60	938,99	3,74	935,25	0

EXERCICE 2 **5 points**

Un stock de champignons est constitué de trois variétés de champignons conditionnés en barquettes. Ces barquettes proviennent exclusivement de France ou d'Italie.

Ce stock est composé à 50 % de barquettes de cèpes, à 30 % de barquettes de girolles et à 20 % de barquettes de morilles.

15 % des barquettes de cèpes proviennent d'Italie.
20 % des barquettes de girolles proviennent d'Italie.
40 % des barquettes de morilles proviennent d'Italie.
On choisit une barquette de ce stock au hasard.
On notera les évènements suivants :

— C : « La barquette choisie contient des cèpes » ;
— G : « La barquette choisie contient des girolles » ;
— M : « La barquette choisie contient des morilles » ;
— I : « La barquette choisie provient d'Italie » ;
— F : « La barquette choisie provient de France ».

1. Quelle est la probabilité que la barquette choisie contienne des cèpes et provienne de France ?
2. Montrer que la probabilité que la barquette choisie provienne d'Italie est $0,215$.
3. Quelle est la probabilité que la barquette choisie contienne des cèpes sachant que cette barquette provient d'Italie ? On donnera une valeur arrondie à 10^{-3}.
4. La barquette choisie provient de France. Quelle est la probabilité que ce soit une barquette de girolles ? On donnera une valeur arrondie à 10^{-3}.

PROBLÈME **11 points**

Le tableau ci-dessous donne le taux d'équipement en magnétoscope des couples avec enfant(s) d'une certaine région française de 1980 à 2000 tous les quatre ans.
Dans ce tableau, x_i représente l'expression : $\dfrac{a_i - 1980}{4}$.

Année a_i	1980	1984	1988	1992	1996	2000
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5
Taux y_i en %	5	8	24	50	77	88

Par exemple, 5 % des couples avec enfant(s) de cette région possède un magnétoscope en 1980.

Partie A
Ajustement affine

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm par rang d'année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 % sur l'axe des ordonnées).

1. Représenter le nuage de points correspondant à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.
2. Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série statistique et placer celui-ci sur le graphique précédent.
3. Dans toute cette question, aucun détail des calculs n'est demandé Les résultats pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice ; ils seront arrondis à 10^{-2}.
   Donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Représenter cette droite sur le graphique précédent.
   On suppose que le modèle obtenu à la **question 3** reste valable pour les années suivantes.
   Déterminer, par le calcul, en quelle année ce taux dépassera 95 %.

Partie B
Ajustement logistique

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{100}{1 + k\mathrm{e}^{bx}}.$$

où k et b sont des constantes à déterminer.

1. Déterminer par le calcul les valeurs exactes de k et b pour que la courbe représentative de f passe par les points $\mathrm{M}(0\,;5)$ et $\mathrm{N}(3\,;50)$.

Donner une valeur de b arrondie à l'unité.

2. Dans toute cette question, on pose :

$$f(x) = \frac{100}{1+19\mathrm{e}^{-x}}$$

et on admettra que $f(x)$ représente le taux d'équipement en magnétoscope des couples avec enfant(s) de cette région pour l'année de rang x.

a. Montrer que la droite d'équation $y = 100$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$. Déterminer la position de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote.

b. Calculer la dérivée f' de f et vérifier que $f'(x)$ est du signe de e^{-x}.

En déduire les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de f.

c. Tracer la courbe représentative de f sur le graphique de la **partie A**.

d. Résoudre l'inéquation : $f(x) \geqslant 95$. Interpréter ce résultat en terme de taux d'équipement.

e. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, on a $f(x) = \dfrac{100\mathrm{e}^{x}}{19+\mathrm{e}^{x}}$.

f. En déduire une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

g. On assimile le taux moyen d'équipement prévisible avec ce modèle logistique entre les années 2000 et 2008 à la valeur moyenne de la fonction f sur $[5\,;7]$.

Calculer ce taux moyen d'équipement prévisible entre les années 2000 et 2008. On en donnera une valeur arrondie à 10^{-2}.