# ∽ Baccalauréat S Polynésie juin 1996 ∾

**EXERCICE 1** **4 points**

Un sondage effectué récemment dans une région montagneuse à propos de la construction d'un barrage donne les résultats suivants :

— 65 % des personnes interrogées sont contre la construction de ce barrage ;
— parmi les personnes qui sont contre cette construction, 70 % sont des écologistes ;
— parmi les personnes favorables à la construction, 20 % sont des écologistes.

On note $C$ l'évènement : « la personne interrogée est contre la construction », et $\overline{C}$ l'évènement contraire.
On note $E$ l'évènement : « la personne interrogée est écologiste ».
On note $F$ l'évènement : « la personne interrogée est contre la construction et n'est pas écologiste ».

1. Calculer les probabilités $p(C)$, $p(E/C)$, $p\left(E/\overline{C}\right)$.
   - **a.** Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit contre la construction du barrage et soit écologiste.
   - **b.** Calculer la probabilité pour qu'une personne interrogée soit pour cette construction et soit écologiste.
   - **c.** En déduire la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.
2. **a.** Montrer que la probabilité de $F$ est égale à $0,195$.
   - **b.** On choisit au hasard 5 personnes parmi celles qui ont été interrogées lors du sondage. Quelle est la probabilité qu'il y en ait au moins une qui soit contre la construction du barrage et ne soit pas écologiste ? (On suppose que les choix des 5 personnes sont indépendants les uns des autres.)

**EXERCICE 2** **5 points**
**Enseignement obligatoire**

La lettre $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

**Partie A**

Soit $P$ le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^2 + 2z\sqrt{3} + 4.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. Écrire les solutions sous forme trigonométrique.

**Partie B**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité 4 cm).
Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 2\text{i}$, $b = -\sqrt{3} + \text{i}$ et $c = -\sqrt{3} - \text{i}$.

1. Placer les points A, B et C sur une figure.
2. Soit $Z = \dfrac{a-b}{c-b}$.
   - **a.** Interpréter géométriquement le module et un argument de $Z$.
   - **b.** Écrire $Z$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
   - **c.** En déduire la nature du triangle ABC ainsi qu'une mesure, en radians, de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{BC}}, \overrightarrow{\text{BA}}\right)$.
3. Calculer l'aire du triangle ABC en centimètres carrés.

**EXERCICE 2** **5 points**
**Enseignement de spécialité**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Soit $\Omega$ le point de coordonnées $(-2\ ;\ 3)$.
Soit $S$ la similitude plane directe de centre D, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.
À tout point $M$ d'affixe $z = x + \text{i}y$ ($x$ et $y$ réels), $S$ associe le point $M'$ d'affixe $z' = x' + \text{i}y'$ ($x'$ et $y'$ réels).

1. Exprimer $z'$ en fonction de $z$. Quelle est la similitude réciproque $S'$ de $S$ ?
2. En déduire l'expression de $x'$ et de $y'$ en fonction de $x$ et de $y$.
3. Soit $C'$ la conique dont une équation cartésienne dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est :

$$9x^2 + 16y^2 - 144 = 0.$$

   Quelle est la nature de $C'$ ? Préciser les coordonnées des foyers et des sommets de $C'$. Calculer l'excentricité de $C'$ et tracer $C'$ à l'aide des éléments trouvés.
4. Soit $C$ la conique image de $C'$ par la similitude $S'$ (autrement dit $C'$ est l'image de $C$ par la similitude $S$).
   Sans chercher à déterminer une équation cartésienne de $C$, donner la nature de $C$, placer son centre et ses sommets et donner son allure sur la même figure.

**PROBLÈME** **11 points**

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ (unité graphique : 4 cm).

**Partie A - Étude d'une fonction**

1. Soit $f$ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$

   On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
   **a.** Calculer les limites de $f$ aux bornes de $]0\ ;\ +\infty[$.
   **b.** Étudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variations. 0,75 0,75
   **c.** Montrer que la droite $(\Delta)$ d'équation $y = x - \ln 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.
   Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (d).
   **d.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ et justifier que $\alpha$ appartient à l'intervalle $\left[1\ ;\ \dfrac{5}{4}\right]$.
2. Soit la fonction $g$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = (2x+1)\text{e}^{-x}.$$

   **a.** Étudier la limite de $g$ en $+\infty$.
   **b.** Étudier les variations de $g$ et dresser son tableau de variations.
   **c.** Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de $g$ dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ et sa tangente à l'origine.

**d.** Soit $b$ un réel strictement positif.

Déterminer, en cm$^2$, l'aire $\mathscr{A}(b)$ de la partie du plan limitée par l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_g$ et la droite d'équation $x = b$. (On pourra utiliser une intégration par parties.)

**3.** L'aire $\mathscr{A}(b)$ admet-elle une limite lorsque $b$ tend vers $+\infty$ ?

**Partie B - Calcul approché de $\alpha$**

**1.** Montrer que $\alpha$ est solution de l'équation $g(x) = x$.

**2.** Montrer que : si $1 \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{4}$, alors $1 \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{5}{4}$.

**3.** En étudiant le signe de $g''$ et les variations de $g'$, montrer que pour tout élément $x$ de $\left[1 ; \dfrac{5}{4}\right]$, $\left|g'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

**4.** Soit $(U_n)$ la suite définie par : $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = g\left(U_n\right)$.

**a.** En utilisant 2. montrer par récurrence que : pour tout entier naturel $n$, $1 \leqslant U_n \leqslant \dfrac{5}{4}$.

**b.** Prouver que : pour tout entier naturel $n$,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$$

En déduire que : pour tout entier naturel $n$,

$$|U_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Quelle est la limite de la suite $(U_n)$ ?

**c.** Déterminer un entier naturel $p$ tel que $U_p$ soit une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près et donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.