Baccalauréat S Polynésie juin 1997

EXERCICE 1 **4 points**

Les questions 1, 2 *et* 3 *sont indépendantes.*
Tous les résultats de calcul de probabilité seront donnés sous forme d'une fraction irréductible.

Une classe de terminale S d'un lycée compte 30 élèves dont 10 filles.

1. À chaque séance du cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard trois élèves.
   Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A : « Exactement deux des trois élèves interrogés sont des garçons »
   B : « Les trois élèves interrogés sont de même sexe »
   C : « Il y a au plus une fille parmi les trois élèves interrogés. »
2. Parmi les 19 internes de la classe, on compte 4 filles.
   On choisit au hasard dans cette classe deux délégués de sexes différents.
   Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   D : « Les deux délégués sont internes »
   E : « Un seul de deux délégués est interne ».
3. À la fin de chaque séance le professeur désigne au hasard un élève qui effacera le tableau. Un même élève peut être désigné plusieurs fois.
   a. Déterminer la probabilité p_n pour que le tableau soit effacé au moins une fois par une fille à l'issue de n séances.
   b. Déterminer le nombre minimal de séances pour que $p_n > 0,9999$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, on considère les points M_n d'affixes

$$z_n = \left(\frac{1}{2}\text{i}\right)^n \left(1 + \text{i}\sqrt{3}\right)$$

où n est un entier naturel.

1. Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n puis z_n en fonction de z_0 et n.
   Donner z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
2. Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 (unité graphique : 4 cm).
3. Déterminer la distance $\text{O}M_n$ en fonction de n.
4. **a.** Montrer que l'on a $M_nM_{n+1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout n entier naturel.
   b. On pose $L_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} M_kM_{k+1}$ (c'est-à-dire $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}$).
   Déterminer L_n en fonction de n puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

5. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}M_0},\ \overrightarrow{\mathrm{O}M_n}\right)$ en fonction de n.
Pour quelles valeurs de n les points O, M_0 et M_n ; sont-ils alignés ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

On considère dans un plan (P) un triangle équilatéral ABC de côté a (a est un réel strictement positif).

1. Construire le barycentre D du système $\{(\mathrm{A}\ ;\ 2), (\mathrm{B}\ ;\ -2), (\mathrm{C}\ ;\ -1)\}$.

2. **a.** Déterminer $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ en fonction de a.

b. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles et que le triangle BCD est rectangle en B.

3. Calculer les distances CD, BD et AD en fonction de a.

4. Pour tout point M du plan, on pose $f(M) = 2M\mathrm{A}^2 - 2M\mathrm{B}^2 - M\mathrm{C}^2$ et on désigne par (F) l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = 0$.

a. Vérifier que C appartient à (F).

b. Exprimer $f(M)$ en fonction de la distance MD et de a.

c. Déterminer et construire (F).

5. Pour tout point M du plan, on pose $g(M) = 2\,\overrightarrow{M\mathrm{C}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DB}} + a^2$.

a. Déterminer l'ensemble (G) des points M du plan tels que $g(M) = a^2$.

b. Soit I le point d'intersection autre que C des ensembles (F) et (G).
Montrer que le triangle CDI est équilatéral.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + \left(x^2 + 2\right)\mathrm{e}^{-x}$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - \left(x^2 - 2x + 2\right)\mathrm{e}^{-x}$$

1. Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Calculer la dérivée de g et déterminer son signe.

3. En déduire le tableau de variation de g.

4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis justifier que

$$0,35 \leqslant \alpha \leqslant 0,36.$$

5. En déduire le signe de g.

Partie II : Étude de f

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel.

3. En déduire, à l'aide de la partie I, les variations de f et donner son tableau de variation.

4. **a.** Démontrer que :

$$f(\alpha) = \alpha\left(1+2\mathrm{e}^{-\alpha}\right)$$

b. À l'aide de l'encadrement de α déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 4×10^{-2}.

5. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x-1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$. Préciser la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à Δ.

6. Donner une équation de la tangente T à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

7. Tracer Δ, T puis $(\mathscr{C})$.

8. **a.** Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P(x) = \left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^{-x}$$

soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto \left(x^2+2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Calculer en fonction de α l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2 de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C})$, Δ et les droites d'équations $x=-\alpha$ et $x=0$.

c. Justifier que :

$$\mathscr{A} = 4\mathrm{e}^{2\alpha}+8e^{\alpha}-16$$

Partie III : Étude d'une suite

1. Démontrer que pour tout x de $[1\,;2]$:

$$1 \leqslant f(x) \leqslant 2$$

2. Démontrer que pour tout x de $[1\,;\,2]$:

$$0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{3}{4}$$

3. En utilisant le sens de variation de la fonction h définie sur $[1\,;2]$ par :

$$h(x) = f(x)-x$$

démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique β dans $[1\,;\,2]$.

4. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right)$$

a. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_n \leqslant 2$$

b. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$\left|u_{n+1} - \beta\right| \leqslant \frac{3}{4}\left|u_n - \beta\right|$$

c. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$\left|u_n - \beta\right| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

d. En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

e. Trouver un entier n_0 tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on ait :

$$\left|u_n - \beta\right| \leqslant 10^{-2}$$