Baccalauréat C Polynésie juin 1998

EXERCICE 1 **5 POINTS**
Commun à tous les candidats

Une urne A contient 2 boules rouges et 3 boules noires, une urne B contient 3 boules rouges et deux boules noires.
On tire au hasard une boule de l'urne A :

- si elle est noire, on la place dans l'urne B,
- sinon, on l'écarte du jeu.

On tire au hasard ensuite une boule de l'urne B.
On considère les évènements suivants :
R_1 : « La boule tirée de A est rouge » ;
N_1 : « La boule tirée de A est noire » ;
R_2 : « La boule tirée de B est rouge » ;
N_2 : « La boule tirée de B est noire ».

1. **a.** Calculer les probabilités des évènements R_1 et N_1.
   b. Calculer les probabilités des évènements « R_2 sachant R_1 » et « R_2 sachant N_1 ». En déduire que la probabilité de R_2 est de $\dfrac{27}{50}$.
   c. Calculer la probabilité de N_2.
2. On répète n fois l'épreuve précédente (tirage d'une boule de A, suivie du tirage d'une boule de B dans les mêmes conditions initiales indiquées ci-dessus), en supposant les différentes épreuves indépendantes.
   Quel nombre minimum d'essais doit-on effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois une boule rouge de l'urne B soit supérieure à 0,99 ?

EXERCICE 2 **5 POINTS**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique 2 cm). On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $3+2\text{i}$.
On appelle f l'application qui, à tout point M distinct de A et d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z-1+2\text{i}}{z-1}$$

1. Calculer les affixes des points O$'$ et B$'$, images respectives des points O et B par f. Placer les points A, O$'$, B et B$'$ dans le plan.
2. **a.** Calculer, pour tout complexe z différent de 1, le produit

$$\left(z'-1\right)(z-1)$$

   b. En déduire que, pour tout point M distinct de A, on a :

$$\text{A}M \times \text{A}M' = 2 \text{ et } \left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{A}M}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{A}M'}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

3. Démontrer que, si M appartient au cercle (C) de centre A passant par O, alors M' appartient à un cercle (C'). En préciser le centre et le rayon.
   Construire (C) et (C').
4. **a.** Déterminer l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{AB}}\right)$.

b. Démontrer que, si M est un point autre que A de la demi-droite (d) d'origine A, passant par B, alors M' appartient à une demi-droite que l'on précisera.

5. On appelle P le point d'intersection du cercle (C) et de la demi-droite (d).
Placer son image P' sur la figure.

EXERCICE 2 **5 POINTS**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$(unité graphique : 2 cm).
On appelle T l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, fait correspondre le point M' d'affixe

$$z' = 2z + \frac{1}{z}.$$

1. θ désignant un réel quelconque de l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$, on considère le point M ayant pour affixe $z = \text{e}^{\text{i}\theta}$.

a. Démontrer que les coordonnées du point M' sont :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x' & = & 3\cos\theta \\ y' & = & \sin\theta. \end{array}\right.$$

b. En déduire que l'image par T du cercle (C) de centre O et de rayon 1 est une conique (E) dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques (centre, sommets, foyers).
On vérifiera que les foyers F et F$'$ ont pour coordonnées respectives $\left(2\sqrt{2}\,;\,0\right)$ et $\left(-2\sqrt{2}\,;\,0\right)$.

2. Réaliser une figure comportant :
- le cercle (C),
- la conique (E) et ses éléments caractéristiques déterminés au 1. b,
- un point M de (C) et son image M' par T.

3. **a.** Pour tout point $M'(3\cos\theta\,;\,\sin\theta)$ de la courbe (E), calculer les distances $M'\text{F}$ et $M'\text{F}'$ en fonction de θ.

b. En déduire que, pour tout point M' de (E), $M'\text{F} + M'\text{F}'$ est indépendant de θ.

(*Ce type d'exercice n'est plus au programme à partir de la session de* 1999.)

PROBLÈME **10 POINTS**

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

1. Déterminer les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle (E_1) :

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

2. On considère l'équation différentielle (E_2) :

$$y'' + 2y' + y = x + 3.$$

a. Vérifier que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x + 1$ est solution de (E_2).

b. Démontrer qu'une fonction g est solution de (E_2) si, et seulement si, la fonction $g - p$ est solution de (E_1).

c. Déduire de **1.** et **2. b** les solutions de (E_2)

d. Déterminer la solution générale de (E_2) qui vérifie :

$$g(0) = 1 \quad \text{et} \quad g'(0) = 2.$$

Partie B : étude d'une fonction f et courbe représentative

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + x\text{e}^{-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

1. **a.** f' et f'' désignant respectivement les dérivées première et seconde de f, calculer, pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.

   b. Étudier le sens de variation de la dérivée f'.

   c. Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) > 0$.

   d. Calculer la limite de f en $+\infty$.

   e. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2. **a.** Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x+1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ et préciser la position relative de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$.

   b. La courbe $(\mathscr{C})$ admet en un point A une tangente parallèle à la droite $(\mathscr{D})$.
   Déterminer les coordonnées de A.

3. Démontrer que l'équation de $f(x) = 2$ admet sur $[0~;~+\infty[$ une unique solution notée α , puis vérifier que $0 < \alpha < 1$.

4. **a.** Construire la droite $(\mathscr{D})$, le point A défini au **2. b.**, la courbe $(\mathscr{C})$ et la tangente en A à la courbe $(\mathscr{C})$.

   b. Donner par lecture graphique une valeur approchée de α.

Partie C : Recherche d'une approximation décimale de α

1. Démontrer que, sur $[0~;~+\infty[$, l'équation : $f(x) = 2$ équivaut à l'équation :

$$\frac{\text{e}^x}{\text{e}^x + 1} = x$$

2. On appelle h la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$h(x) = \frac{\text{e}^x}{\text{e}^x + 1}.$$

   a. Calculer $h'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ et réaliser le tableau de variations de la fonction h.

   b. En déduire que, pour tout réel x de $[0; 1]$, $h(x)$ appartient à $[0; 1]$.

   c. Calculer $h''(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$; étudier le sens de variations de h'.

   d. En déduire que, pour tout réel x de $[0; 1]$,

$$0 \leqslant h'(x) \leqslant \frac{1}{4}$$

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{array}\right.$$

   pour tout entier naturel n.

   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $[0; 1]$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$

c. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

d. Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée à 10^{-6} près de α et, à l'aide de la calculatrice, proposer une approximation décimale de u_p à 10^{-6} près. Que peut-on en déduire pour α ?