Baccalauréat S Polynésie septembre 1998

Durée : 4 heures

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan (P) est muni du repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

À tout point M du plan (P) est associé le nombre complexe z, affixe du point M.

1. **a.** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes

$$z_1 = -1, \quad z_2 = \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \; z_3 = -1-\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

   b. Déterminer le module et un argument de chacun des cubes z_1^3, z_2^3, z_3^3 des complexes ci-dessus, puis la partie réelle et la partie imaginaire de z_1^3, de z_2^3 et de z_3^3.

2. **a.** Si $z = x + \mathrm{i}y = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est un nombre complexe (avec , y et θ réels et ρ réel supérieur à zéro), déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z^3 en fonction de x et y, puis le module et un argument de z^3 en fonction de ρ et θ.

   b. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z caractérisé par : z^3 est un nombre réel.

   c. Déterminer et tracer l'ensemble (E′) des points M d'affixe z, caractérisé par : z^3 est un nombre réel et $1 \leqslant z^3 \leqslant 8$.

Exercice 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Dans l'espace muni du repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$, nous considérons les points A de coordonnées (0 ; 6 ; 0), B de coordonnées (0 ; 0 ; 8), C de coordonnées (4 ; 0 ; 8).

1. **a.** Réaliser la figure comportant les points définis dans l'exercice (unité graphique : 1 cm).

   b. Démontrer que :
   - les droites (BC) et (BA) sont orthogonales ;
   - les droites (CO) et (OA) sont orthogonales ;
   - la droite (BC) est orthogonale au plan (OAB).

   c. Déterminer le volume, en cm^3, du tétraèdre OABC.

   d. Démontrer que les quatre points O, A, B, C se trouvent sur une sphère dont vous déterminerez le centre et le rayon.

2. À tout réel k de l'intervalle ouvert $]0~;~8[$, est associé le point $M(0~;~0~;~k)$. Le plan (π) qui contient M et est orthogonal la droite (OB) rencontre les droites (OC), (AC), (AB) respectivement en N, P, Q.

   a. Déterminer la nature du quadrilatère $(MNPQ)$.

   b. La droite (PM) est-elle orthogonale à la droite (OB) ? Pour quelle valeur de k, la droite (MP) est-elle orthogonale à la droite (AC) ?

   c. Déterminer MP^2 en fonction de k. Pour quelle valeur de k, la distance PM est-elle minimale ?

Problème **10 points**

L'objectif est d'étudier quelques propriétés de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = (1 - x^2)\mathrm{e}^{-x}.$$

Partie A
Variations de f et tracé de la courbe (F)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = (1 - x^2)\mathrm{e}^{-x}.$$

Dans le plan (P) muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm) la représentation graphique de la fonction f est notée (F).

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de f : interpréter graphiquement ce résultat.
2. **a.** Déterminer, suivant les valeurs de x de l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$, le signe de $x^2 - 2x - 1$ et celui de $f(x)$.
   b. Déterminer la fonction dérivée f' de f. En déduire le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations ; préciser les valeurs exactes du minimum et du maximum.
3. Déterminer une équation de la tangente notée (T) la courbe (F) au point A de (F) dont l'abscisse est 0.
4. **a.** Déterminer la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 0,1 près de chacun des coefficients directeurs des tangentes à la courbe (F) en B(1 ; 0) et C(−1 ; 0).
   b. Tracer les trois tangentes à la courbe (F) en A, B(1 ; 0) et C(−1 ; 0) et la courbe (F).

Partie B

Intégrales et aires

Les surfaces S et $S_1(u)$ du plan (P), où u est un réel donné de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ sont définies par :
S est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que : $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$,
$S_1(u)$ est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que $1 \leqslant x \leqslant u$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 0$.
Les aires respectives de ces surfaces sont notées $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}_1(u)$. Leurs valeurs exactes seront exprimées en unités d'aire.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ où x est un réel positif.
   En procédant à deux intégrations par parties successives, déterminer cette intégrale.
2. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^0 f(t)\,\mathrm{d}t$.
   En déduire la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$.
3. Déterminer, en fonction de u où $u \geqslant 1$, l'aire $\mathscr{A}_1(u)$ puis la limite, lorsque u tend vers $+\infty$, de $\mathscr{A}_1(u)$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
4. L'objectif est de déterminer le réel α supérieur ou égal à 1 pour lequel
   $\mathscr{A}_1(\alpha) = \mathscr{A}$.
   a. Démontrer que, sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, l'équation $\mathscr{A}_1(x) = \mathscr{A}$ est équivalente à : $x = 2\ln(1 + x)$.
   b. Étudier le sens de variations de la fonction h définie sur l'intervalle
   $[1\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = x - 2\ln(1 + x)$.
   Démontrer que, sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, l'équation $x = 2\ln(1 + x)$ admet exactement une solution et que celle-ci, notée α, vérifie la condition
   $2 < \alpha < 3$.
   c. Déterminer, en indiquant la méthode utilisée, un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.
   Déterminer $f(\alpha)$ sous la forme d'une fonction rationnelle de α puis l'encadrement de $f(\alpha)$, que vous pouvez déduire du précédent, d'amplitude 2×10^{-4}.