Baccalauréat S Polynésie septembre 2002

Exercice 1

Une compagnie d'assurance automobile fait un bilan des frais d'intervention, parmi ses dossiers d'accidents de la circulation.

- 85 % des dossiers entraînent des frais de réparation matérielle.
- 20 % des dossiers entraînent des frais de dommages corporels.
- 12 % des dossiers entraînant des frais de réparation matérielle entraînent aussi des frais de dommages corporels.

Soit les évènements suivants :
R : le dossier traité entraîne des frais de réparation matérielle
D : le dossier traité entraîne des frais de dommages corporels.

1. En utilisant les notations R et D, exprimer les trois pourcentages de l'énoncé en termes de probabilités ; les résultats seront donnés sous forme décimale.
2. Calculer la probabilité pour qu'un dossier :
   a. entraîne des frais de réparation matérielle et des frais de dommages corporels ;
   b. entraîne seulement des frais de réparation matérielle ;
   c. entraîne seulement des frais de dommages corporels ;
   d. n'entraîne ni frais de réparation matérielle ni frais de dommages corporels ;
   e. entraîne des frais de réparation matérielle sachant qu'il entraîne des frais de dommages corporels.
3. On constate que 40 % des dossiers traités correspondent à des excès de vitesse et parmi ces derniers 60 % entraînent des frais de dommages corporels.
   a. On choisit un dossier ; quelle est la probabilité pour que ce dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels ?
   b. On choisit cinq dossiers de façon indépendante. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels.

Exercice 2

Partie A

1. z_1 et z_2 sont des nombres complexes ; résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_1\sqrt{3} - z_2 & = & -2 \\ z_1 \quad - z_2\sqrt{3} & = & -2\text{i} \end{array}\right.$$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct de centre O, d'unité graphique 4 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -\sqrt{3} + \text{i}, \qquad z_{\text{B}} = -1 + \text{i}\sqrt{3}.$$

   Donner les écritures de z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle.
   Placer les points A et B.

3. Calculer module et argument de $\dfrac{z_A}{z_B}$.

   En déduire la nature du triangle ABO et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)$.

4. Déterminer l'affixe du point C tel que ACBO soit un losange. Placer C. Calculer l'aire du triangle ABC en cm^2.

Partie B

Soit f la transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} z.$$

1. Définir cette transformation et donner ses éléments caractéristiques.
2. Quelles sont, sous forme exponentielle, les affixes de A$'$, B$'$, et C$'$ images par f de A, B et C ?
3. Quelle est l'aire du triangle A$'$B$'$C$'$ en cm^2 ?

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, toutes les courbes demandées seront tracées dans ce repère (unité graphique 4 cm).

Partie A - Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1},$$

Γ est sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier la parité de f.
2. Montrer que pour tout x appartenant $\mathbb{R}$, $-1 < f(x) < 1$.
3. Quelles sont les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$? En déduire les équations des asymptotes éventuelles à Γ.
4. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations ; en déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
5. **a.** α étant un nombre appartenant à $]-1\ ;\ 1[$, montrer que l'équation $f(x) = \alpha$ admet une solution unique x_0. Exprimer alors x_0 en fonction de α.

   b. Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$, donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

Partie B - Tangentes à la courbe

1. Déterminer une équation de la tangente Δ_1 à Γ au point d'abscisse 0.
2. Montrer que pour tout nombre t réel, $f'(t) = 1 - [f(t)]^2$. En déduire un encadrement de $f'(t)$.
3. Pour x positif ou nul, déterminer un encadrement de $\displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$, puis justifier que $0 \leqslant f(x) \leqslant x$. Quelles sont les positions relatives de Γ et Δ_1 ?
4. Déterminer une équation de la tangente Δ_2 à Γ au point A d'ordonnée $\dfrac{1}{2}$.

5. Montrer que le point B de la courbe Γ, d'ordonnée positive, où le coefficient directeur de la tangente est égal à $\frac{1}{2}$ a pour coordonnées :

$$\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

6. Tracer Γ, Δ_1 et Δ_2. On placera les points A et B.

Partie C - Calcul d'intégrales

1. Montrer que $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; en déduire une primitive de f.
2. Quelle est l'aire en cm^2 de la surface comprise entre Γ, la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$?

   Hachurer cette surface sur la représentation graphique.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^2\,dx$.
4. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x\left(1-[f(x)]^2\right)\,dx = \frac{e^2-1}{e^2+1} - \ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right).$$

En déduire $\displaystyle\int_0^1 x[f(x)]^2\,dx$.