

∞ Baccalauréat S Polynésie septembre 2002 ∞

EXERCICE 1

Une compagnie d'assurance automobile fait un bilan des frais d'intervention, parmi ses dossiers d'accidents de la circulation.

- 85 % des dossiers entraînent des frais de réparation matérielle.
- 20 % des dossiers entraînent des frais de dommages corporels.
- 12 % des dossiers entraînant des frais de réparation matérielle entraînent aussi des frais de dommages corporels.

Soit les événements suivants :

R : le dossier traité entraîne des frais de réparation matérielle

D : le dossier traité entraîne des frais de dommages corporels.

1. En utilisant les notations R et D , exprimer les trois pourcentages de l'énoncé en termes de probabilités; les résultats seront donnés sous forme décimale.
2. Calculer la probabilité pour qu'un dossier :
 - a. entraîne des frais de réparation matérielle et des frais de dommages corporels;
 - b. entraîne seulement des frais de réparation matérielle;
 - c. entraîne seulement des frais de dommages corporels;
 - d. n'entraîne ni frais de réparation matérielle ni frais de dommages corporels;
 - e. entraîne des frais de réparation matérielle sachant qu'il entraîne des frais de dommages corporels.
3. On constate que 40 % des dossiers traités correspondent à des excès de vitesse et parmi ces derniers 60 % entraînent des frais de dommages corporels.
 - a. On choisit un dossier; quelle est la probabilité pour que ce dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels?
 - b. On choisit cinq dossiers de façon indépendante. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels.

EXERCICE 2

Partie A

1. z_1 et z_2 sont des nombres complexes; résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} z_1\sqrt{3} - z_2 &= -2 \\ z_1 &- z_2\sqrt{3} = -2i \end{cases}$$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct de centre O , d'unité graphique 4 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = -\sqrt{3} + i, \quad z_B = -1 + i\sqrt{3}.$$

Donner les écritures de z_A et z_B sous forme exponentielle.

Placer les points A et B .

3. Calculer module et argument de $\frac{z_A}{z_B}$.

En déduire la nature du triangle ABO et une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

4. Déterminer l'abscisse du point C tel que ACBO soit un losange. Placer C. Calculer l'aire du triangle ABC en cm^2 .

Partie B

Soit f la transformation qui à tout point M d'abscisse z associe le point M' d'abscisse z' telle que

$$z' = e^{-\frac{i\pi}{6}} z.$$

- Définir cette transformation et donner ses éléments caractéristiques.
- Quelles sont, sous forme exponentielle, les abscisses de A' , B' , et C' images par f de A, B et C?
- Quelle est l'aire du triangle $A'B'C'$ en cm^2 ?

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, toutes les courbes demandées seront tracées dans ce repère (unité graphique 4 cm).

Partie A - Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1},$$

Γ est sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Étudier la parité de f .
- Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $-1 < f(x) < 1$.
- Quelles sont les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$? En déduire les équations des asymptotes éventuelles à Γ .
- Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations; en déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- α étant un nombre appartenant à $] -1 ; 1[$, montrer que l'équation $f(x) = \alpha$ admet une solution unique x_0 . Exprimer alors x_0 en fonction de α .
 - Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

Partie B - Tangentes à la courbe

- Déterminer une équation de la tangente Δ_1 à Γ au point d'abscisse 0.
- Montrer que pour tout nombre t réel, $f'(t) = 1 - [f(t)]^2$. En déduire un encadrement de $f'(t)$.

3. Pour x positif ou nul, déterminer un encadrement de $\int_0^x f'(t) dt$, puis justifier que $0 \leq f(x) \leq x$. Quelles sont les positions relatives de Γ et Δ_1 ?
4. Déterminer une équation de la tangente Δ_2 à Γ au point A d'ordonnée $\frac{1}{2}$.
5. Montrer que le point B de la courbe Γ , d'ordonnée positive, où le coefficient directeur de la tangente est égal à $\frac{1}{2}$ a pour coordonnées :

$$\left(\ln(1 + \sqrt{2}) ; \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

6. Tracer Γ , Δ_1 et Δ_2 . On placera les points A et B.

Partie C - Calcul d'intégrales

1. Montrer que $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; en déduire une primitive de f .
2. Quelle est l'aire en cm^2 de la surface comprise entre Γ , la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$?
Hachurer cette surface sur la représentation graphique.
3. Calculer $\int_0^1 [f(x)]^2 dx$.
4. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x(1 - [f(x)]^2) dx = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} - \ln\left(\frac{e^2 + 1}{2e}\right).$$

En déduire $\int_0^1 x[f(x)]^2 dx$.