

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Polynésie septembre 2005 ∞

EXERCICE 1

5 points

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C.

À l'instant 0, la puce est en A.

Pour tout entier naturel n :

- si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant $(n + 1)$, elle est :
soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$;
soit en C avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$.
- si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant $(n + 1)$, elle est :
soit en C, soit en A de façon équiprobable
- si à l'instant n la puce est en C, alors elle y reste.

On note A_n (respectivement B_n, C_n) l'évènement « à l'instant n la puce est en A » (respectivement en B, en C).

On note a_n (respectivement b_n, c_n) la probabilité de l'évènement A_n , (respectivement B_n, C_n).

On a donc : $a_0 = 1, b_0 = c_0 = 0$.

Pour traiter l'exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.

1. Calculer a_k, b_k et c_k pour k entier naturel tel que $1 \leq k \leq 3$.
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$a_n + b_n + c_n = 1 \text{ et } \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n \end{cases}$$

- b. Montrer que, pour tout entier naturel $n, a_{n+2} = \frac{1}{6}a_n$.

- c. En déduire que, pour tout entier naturel p ,

$$\begin{cases} a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p & \text{et } a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 & \text{et } b_{2p+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^p \end{cases} .$$

3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2

7 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique : 1 cm).

Partie A

Dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère la courbe \mathcal{H} d'équation $y^2 - x^2 = 16$.

1. Montrer que \mathcal{H} est la réunion de deux courbes \mathcal{C} et \mathcal{C}' où \mathcal{C} est la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ et où \mathcal{C}' est l'image de \mathcal{C} par une transformation simple que l'on précisera.
2. Étudier la fonction f (limites aux bornes de l'ensemble de définition et sens de variation).

- a. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote de \mathcal{C} .
- b. Tracer \mathcal{H} dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .
On nomme A et B les points de la courbe d'abscisses respectives -3 et 3 .
On considère le domaine \mathcal{D} du plan constitué des points $M(x; y)$ vérifiant :

$$-3 \leq x \leq 3 \text{ et } \sqrt{x^2 + 16} \leq y \leq 5.$$

Hachurer le domaine \mathcal{D} et exprimer l'aire de \mathcal{D} à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

Partie B

On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

1. a. Donner l'écriture complexe de r .
- b. On désigne par x' et y' les coordonnées du point M' , image du point $M(x; y)$ du plan.

$$\text{Vérifier que } \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y) \end{cases}$$

Déterminer les coordonnées des points A' et B' , images respectives de A et B par la rotation r . Placer les points A' et B' dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

2. Soit \mathcal{H}' l'hyperbole d'équation $xy = 8$.
- a. Tracer \mathcal{H}' dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .
- b. Montrer que \mathcal{H}' est l'image de \mathcal{H} par la rotation r .
3. Soit \mathcal{D}' l'image de \mathcal{D} par la rotation r . On admet que \mathcal{D}' est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan vérifiant $\sqrt{2} \leq x \leq 4\sqrt{2}$ et $\frac{8}{x} \leq y \leq 5\sqrt{2} - x$.
- a. Hachurer \mathcal{D}' .
- b. Calculer l'aire de \mathcal{D}' , exprimée en cm^2 .
En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de l'aire de \mathcal{D} .

EXERCICE 3

3 points

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point; une réponse inexacte enlève 0,5 point; l'absence de réponse est comptée 0 point.

Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1. Le point M est situé sur le cercle de centre $A(-2; 5)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Son affixe z vérifie :
- a. $|z - 2 + 5i|^2 = 3$;
- b. $|z + 2 - 5i|^2 = 3$;
- c. $|z - 2 + 5i| = 3$.

2. On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a , b et c , deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\frac{z-b}{c-a}$ et $\frac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.
- M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC;
 - M appartient aux cercles de diamètres respectifs [AC] et [AB];
 - M est l'orthocentre du triangle ABC.
3. Soit A et B les points d'affixes respectives $1+i$ et $5+4i$, et C un point du cercle de diamètre [AB]. On appelle G l'isobarycentre des points A, B et C et on note z_G son affixe.
- $|z_G - 3 - 2,5i| = \frac{5}{6}$;
 - $z_G - (1+i) = \frac{1}{3}(4+3i)$;
 - $z_G - (3+2,5i) = \frac{1}{3}(4+3i)$.

EXERCICE 4**5 points**

L'annexe se rapporte à cet exercice.

Elle sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve. Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = e^{-x} \cos(4x)$$

et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) de l'annexe. On considère également la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^{-x}$ et on nomme \mathcal{C} sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$,

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}.$$

- En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et \mathcal{C} .
3. On définit la suite (u_n) sur \mathbb{N} par $u_n = f\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.
- Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.
 - En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.
4. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$,

$$f'(x) = -e^{-x} [\cos(4x) + 4 \sin(4x)].$$

- En déduire que les courbes Γ et \mathcal{C} ont même tangente en chacun de leurs points communs.
5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite \mathcal{T} tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
Compléter le graphique donné en annexe, en y traçant \mathcal{T} et \mathcal{C} .

Annexe : exercice 4

