Baccalauréat S Polynésie septembre 1997

EXERCICE 1 **5 POINTS**

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E \qquad y'' - 5y' + 4y = 0.$$

2. Déterminer la solution particulière f de (E) dont la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ admet pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = -2x + 1$.
3. On pose $u(x) = 2e^x - e^{4x}$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $u(x) \geqslant 0$.
4. On considère la partie de la courbe d'équation $y = u(x)$ pour $-1 \leqslant x \leqslant 0$.
En la faisant tourner autour de l'axe des abscisses, on délimite un solide dont le volume est mesuré en unités de volume par l'intégrale

$$V = \pi \int_{-1}^{0} [u(x)]^2 \, dx.$$

Calculer la valeur exacte de V.

EXERCICE 2 **5 POINTS**
Enseignement de spécialité

Partie A

Soient, dans l'espace E, 4 points A, B, C et D distincts deux à deux.

1. Montrer que ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, D est le barycentre du système $\{(A~;~1),~(B~;~-1),~(C~;~1)\}$.
2. On suppose que ABCD est un parallélogramme. Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace E tels que $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MC}\right\| = BD$.
3. On suppose maintenant que ABCD est un rectangle. Déterminer l'ensemble (Σ) des points M de l'espace E tels que $MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$.

Partie B

On considère dans l'espace E deux parallélogrammes ABCD et $A'B'C'D'$ ainsi que les milieux I, J, K et L de $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ et $[DD']$ respectivement.

1. Montrer que L est barycentre des points I, J, et K affectés de coefficients que l'on précisera.
En déduire que IJKL est un parallélogramme.
2. Soient O, Q et P les centres respectifs des parallélogrammes IJKL, ABCD, et $A'B'C'D'$.
Montrer que O est le milieu de [PQ].

EXERCICE 2 **6 POINTS**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ (Unité graphique : 1 cm).

Soient les nombres complexes $a = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4} + i\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$ et $z_0 = 6 + 6i$ d'image A_0.

Pour tout n entier naturel non nul, on désigne par A_n le point d'affixe z_n définie par

$$z_n = a^n z_0.$$

Partie A

1. Exprimer z_1 et a^2 sous forme algébrique.
   Écrire z_1 sous forme exponentielle et montrer que $a^2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
2. Exprimer z_3 puis z_7 en fonction de a^2 ; en déduire l'expression de z_3 et z_7 sous forme exponentielle.
3. Placer les points A_0, A_1, A_3 et A_7 images respectives des complexes z_0, z_1, z_3 et z_7.

Partie B

Pour tout n entier naturel, on pose $|z_n| = r_n$.

1. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $r_n = 12\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$.
2. En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. Déterminer la limite de la suite (r_n) et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
4. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $\mathrm{O}A_p \leqslant 10^{-3}$ et donner alors une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{O}A_p}\right)$.

PROBLÈME **4 POINTS**

Le but du problème est l'étude d'une fonction f, d'une de ses primitives et d'une suite attachée à cette fonction. Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ avec $\left\|\overrightarrow{\imath}\right\| = 2$ cm et $\left\|\overrightarrow{\jmath}\right\| = 5$ cm.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que f est paire.
   Étudier ses variations sur $[0 ; +\infty[$ et déterminer sa limite en $+\infty$.
   Tracer sa courbe $\mathscr{C}$.
2. Montrer que f établit une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur $]0 ; 1]$.
   On note y un réel quelconque de l'intervalle $]0 ; 1]$. Exprimer en fonction de y le seul réel positif x vérifiant $f(x) = y$.

Partie B

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

(On admettra que pour tout réel x, $x + \sqrt{1+x^2} > 0$).

1. Calculer $F'(x)$. En déduire que F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

2. **a.** Déterminer la limite de F en $+\infty$.

b. Montrer que F est impaire.

c. En déduire la limite de F en $-\infty$.

3. Soit λ un réel strictement positif. On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan constituée des points $M(x\,;\,y)$ tels que $\lambda \leqslant x \leqslant 2\lambda$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ ; donner la valeur exacte de $\mathcal{A}(1)$ et déterminer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

Partie C

On pose $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ et pour tout naturel n non nul, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer u_0. Calculer u_3 à l'aide d'une intégration par parties.

(Remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \times \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$).

2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $0 \leqslant \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n$.

En intégrant cette double inégalité sur $[0\,;\,1]$, montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.