Durée : 4 heures

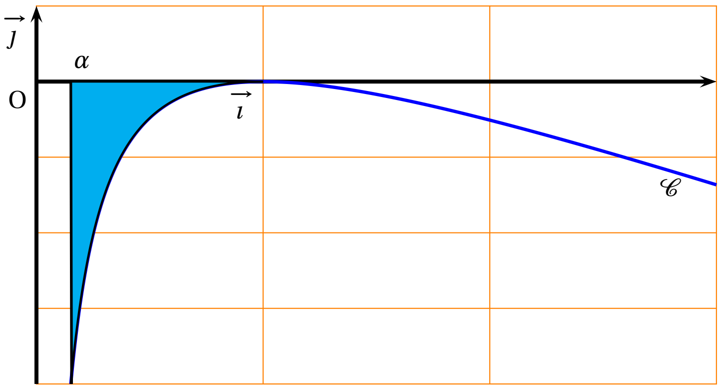
Baccalauréat S Polynésie septembre 2004

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x.$$



1. **a.** Montrer que f est dérivable et que, pour tout x strictement positif, $f'(x)$ est du signe de

$$N(x) = -\left[2\left(x\sqrt{x} - 1\right) + \ln x.\right]$$

   b. Calculer $N(1)$ et déterminer le signe de $N(x)$ en distinguant les cas $0 < x < 1$ et $x > 1$.

   c. En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et les coordonnées du point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée maximale.

2. On note $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où α désigne un réel de $]0\,;\,1[$.

   a. Exprimer $\mathscr{A}(\alpha)$ en fonction de α (on pourra utiliser une intégration par parties).

   b. Calculer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Donner une interprétation graphique de cette limite.

3. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 élément de $[1\,;\,2]$ et :

$$\text{pour tout entier naturel} \quad n,\ u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1.$$

   a. Démontrer, pour tout réel x élément de $[1\,;\,2]$, la double inégalité $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \leqslant 1$.

   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[1\,;\,2]$.

4. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

5. **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

   b. Déterminer la valeur exacte de ℓ.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

Pour tout point M du plan d'affixe z on considère les points M' et M'' d'affixes respectives

$$z' = z - 2 \qquad \text{et} \qquad z'' = z^2.$$

1. **a.** Déterminer les points M pour lesquels $M'' = M$.

   b. Déterminer les points M pour lesquels $M'' = M'$.

2. Montrer qu'il existe exactement deux points M_1 et M_2 dont les images M'_1, M''_1, M'_2 et M''_2 appartiennent à l'axe des ordonnées. Montrer que leurs affixes sont conjuguées.

3. On pose $z = x + \text{i}y$ où x et y sont des nombres réels.

   a. Exprimer sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{z'' - z}{z' - z}$.

   b. En déduire l'ensemble E des points M du plan pour lesquels les points M, M' et M'' sont alignés. Représenter E graphiquement et en couleur.

4. On pose $z = \sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\theta}$ où $\theta \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   a. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z ainsi définis et chacun des ensembles Γ' et Γ'' des points M' et M'' associés à M.

   b. Représenter Γ, Γ' et Γ'' sur la figure précédente

   c. Dans cette question $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Placer le point M_3 obtenu pour cette valeur de θ, et les points M'_3 et M''_3 qui lui sont associés. Montrer que le triangle $\text{M}_3\text{M}'_3\text{M}''_3$ est rectangle. Est-il isocèle ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra, sur la figure 1 cm pour unité graphique.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1 + \text{i}$, $3 + 2\text{i}$ et $\text{i}\sqrt{2}$.

1. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par :

   $$z' = \frac{1+\text{i}}{\sqrt{2}}\overline{z} - 1 + \text{i}\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

   a. Calculer les affixes des points $\text{A}' = f(\text{A})$ et $\text{C}' = f(\text{C})$.

   b. En déduire la nature de f et caractériser cette transformation.

   c. Placer les points A, B et C puis construire le point $\text{B}' = f(\text{B})$.

2. **a.** Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

   b. Montrer que la composée $g = f \circ h$ a pour écriture complexe
   $z'' = (1 + \text{i})\overline{z} - 1 + 3\text{i}$.

3. **a.** Soit M_0 le point d'affixe $2 - 4\text{i}$.
   Déterminer l'affixe du point $\text{M}''_0 = g(\text{M}_0)$ puis vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AM}''_0}$ sont orthogonaux.

b. On considère un point M d'affixe z. On suppose que la partie réelle x et la partie imaginaire y de z sont des entiers.

Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{A}M''}$ sont orthogonaux si, et seulement si $5x + 3y = -2$.

c. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x + 3y = -2$.

d. En déduire les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-6 ; 6]$ tels que $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{A}M''}$ sont orthogonaux. Placer les points obtenus sur la figure.

EXERCICE 3 — 6 points

Commun à tous les candidats

On donne dans le plan trois points A, B et C distincts non alignés.
Une urne U contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ et 3.
Une urne V contient cinq cartons indiscernables au toucher ; quatre cartons portent le nombre 1 et un carton le nombre -1.
On tire au hasard un carton dans chacune des urnes. Les tirages sont équiprobables.
On note a le nombre lu sur le canon de U et b celui lu sur le carton de V.

1. Justifier que les points pondérés (A, a), (B, b) et (C, 4) admettent un barycentre. On le note G.
2. **a.** Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   E_1 « G appartient à la droite (BC) » ;
   E_2 « G appartient au segment [BC] ».

   b. Montrer que la probabilité de l'évènement E_3 : « G est situé à l'intérieur du triangle ABC et n'appartient à aucun des côtés » est égale à $\dfrac{2}{5}$. On pourra faire appel des considérations de signe.
3. Soit n un entier naturel non nul. On répète n fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un carton dans chacune des urnes U et V puis à considérer le barycentre G de la question **1**.

   On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'évènement E_3.

   a. Déterminer l'entier n pour que l'espérance de la variable aléatoire X soit égale à 4.

   b. Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situé à l'intérieur du triangle ABC soit supérieure ou égale à $0,999$.