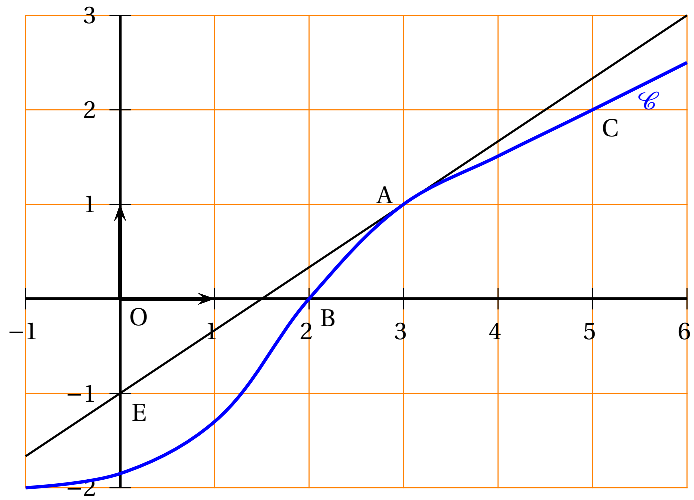
∽ Baccalauréat ES Polynésie juin 1998 ∼

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit une fonction f dérivable et strictement croissante sur $[-1\,;\,6]$.
La courbe $(\mathscr{C})$ représentant f passe par B$(2\,;\,0)$ et C$(5\,;\,2)$.
Sa tangente $(\mathscr{D})$ au point A$(3\,;\,1)$ passe par E$(0\,;\,-1)$.
Le graphique donné pourra être exploité dans tout l'exercice.



On désigne par ln la fonction logarithme népérien. Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln[f(x)]$.

1. Pour quelles valeurs de x, $g(x)$ est-il défini ? On note I l'intervalle trouvé.
2. Quel est le sens de variation de g sur I (justifier) ?
3. Résoudre dans l'intervalle I l'équation $g(x) = 0$.
4. Donner une valeur décimale approchée de $g(5)$ à 0,01 près.
5. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $f'(x)$. En déduire la valeur de $g'(3)$.
6. Quelle est la limite de la fonction g en 2 ? Interpréter graphiquement ce résultat.
7. En utilisant tous les résultats précédents, donner dans un repère orthonormal (l'unité graphique est le centimètre) l'allure de la courbe (F) représentant la fonction g ainsi que sa tangente au point d'abscisse 3.

Exercice 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

On donnera les réponses sous forme de fractions. On dispose de 10 boules blanches, de 10 boules noires et de deux urnes U_1 et U_2.
Un joueur peut répartir les 20 boules comme il le veut entre les deux urnes. Puis on lui bande les yeux, et il choisit au hasard l'une des deux urnes, dans laquelle il tire une boule. Si cette boule est blanche, il gagne.

1. Luc dépose une boule noire dans l'urne U_1 et les 19 autres boules dans l'urne U_2. Quelle est la probabilité qu'il gagne ?
2. Yves dépose une boule blanche dans l'urne U_1 et les 19 autres boules dans l'urne U_2. Quelle est la probabilité qu'il gagne ?
3. Louise dépose 5 boules blanches dans chaque urne, n boules noires dans l'urne U_1 et $(10 - n)$ boules noires dans l'urne U_2 $(0 \leqslant n \leqslant 10)$.

a. Montrer que la probabilité qu'elle gagne est égale à :

$$P_n = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{5+n} + \frac{5}{15-n}\right).$$

b. On donne le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n		$\frac{50}{84}$	$\frac{50}{91}$	$\frac{50}{96}$	$\frac{50}{99}$		$\frac{50}{99}$	$\frac{50}{96}$	$\frac{50}{91}$	$\frac{50}{84}$	

Déterminer les valeurs manquantes.

c. Ranger les probabilités de gagner de Luc, Yves et Louise dans l'ordre croissant.

Exercice 2 5 points
Enseignement de spécialité

Dans une entreprise, la direction et le personnel se sont mis d'accord , afin d'éviter des licenciements, pour réduire la durée hebdomadaire du travail et la faire passer de cinq jours à quatre jours.
L'un des trois jours de congé sera le dimanche, les deux autres étant répartis au hasard dans la semaine.
Dans un sac, on a disposé six boules portant chacune le nom d'un des jours de la semaine, du lundi au samedi. Chaque employé « choisit » ses deux jours de congé autres que le dimanche en tirant au hasard et simultanément deux des boules, supposées indiscernables au toucher. Il remet ensuite les deux boules tirées dans le sac.

1. a. Soit A l'évènement : « L'un des jours de congé est le samedi ». Montrer que la probabilité de A est égale à $\frac{1}{3}$.

b. On définit les évènements B et C suivants :
B : « Parmi les jours de congé figurent le lundi, ou le samedi, ou ces deux jours ».
C : « Les jours de congé sont trois jours consécutifs ».
Calculer la probabilité de ces évènements.

c. Nicolas aimerait bien avoir les mêmes jours de congé qu'Aurélie. Quelle est la probabilité que son souhait se réalise ?

2. L'entreprise compte douze employés. On désigne pas X la variable aléatoire égale au nombre d'employés ayant tiré le samedi comme jour de congé.

a. Calculer la probabilité que X soit égal à 5.

b. Le tableau suivant donne quelques valeurs de la fonction de répartition de X avec une précision de 0,000 1 :

X	0	1	2	3	4
$P(X \leqslant x)$	0,0077	0,0540	0,1811	0,3931	0,6315

En déduire la probabilité que X soit inférieure ou égale à 5.

Problème **10 points**

Une entreprise fabrique un produit chimique liquide. Les coûts seront exprimés en milliers de francs (francs français) et les quantités en tonnes.

1. Coût marginal

On a observé que le coût marginal pour une production de x tonnes est donné pour x réel dans l'intervalle $[0\,;\,40]$ par la fonction h définie par :

$$h(x) = 1,5\mathrm{e}^{0,05x}.$$

a. Étudier les variations de h.

b. Calculer $h(0)$, $h(20)$, $h(30)$, $h(40)$.

c. Représenter la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,40]$. On prendra comme unités 1 cm pour 4 tonnes en abscisse, 1 cm pour 1 millier de francs en ordonnée.

d. Trouver la primitive de h sur l'intervalle $[0\,;\,40]$ qui vaut 30 en 0.

2. Coût total

On note $f(x)$ le coût total pour une production de x tonnes ($0 \leqslant x \leqslant 40$). Les coûts fixes s'élèvent à 30 milliers de francs (c'est-à-dire $f(0) = 30$). On rappelle que $P(x) = h(x)$.

a. Montrer que $f(x) = 30\mathrm{e}^{0,05x}$.

b. Calculer $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ et vérifier que ce nombre est constant. De quel pourcentage le coût total augmente-t-il quand la production augmente d'une tonne ?

3. Coût moyen

Le coût moyen unitaire est défini sur l'intervalle $]0\,;\,40]$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

a. Quel est le coût moyen unitaire d'une tonne, quand l'usine en produit 40 ? (on donnera la réponse arrondie au franc).

b. Étudier la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,40]$ (limite en 0, sens de variation).

Dresser le tableau de variation de g. Tracer la courbe représentative de g sur le graphique précédent.

c. Vérifier sur cet exemple que lorsque le coût moyen est minimal, il est égal au coût marginal.