Baccalauréat mathématiques élémentaires
Polynésie juin 1962

EXERCICE 1

Étudier la fonction

$$\sin 3\theta - 3\sin\theta.$$

EXERCICE 2

Pour quelles valeurs de l'entier n la fraction $\dfrac{2n-5}{n+2}$ est-elle réductible ?
Peut-elle être égale à un entier ?

PROBLÈME

On donne un carré ABCD (les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{CD}}$ étant équipollents) et le cercle (O) de diamètre AB et de centre O (dans le plan du carré).
Un point variable, M, défini par l'angle (OB, OM) = θ, se déplace sur (O) ; MC et MD recoupent AB en P et Q ; les parallèles à AC menées par P et Q coupent MA et MB respectivement en R et S.

1. Quelle est la nature du quadrilatère PQRS ?
   Étudier les variations de son périmètre en fonction de θ, quand M décrit (O).
   Discuter l'existence des quadrilatères PQRS de périmètre donné, ℓ, connaissant le côté, a, de ABCD.
2. MA et MB coupent CD en A′ et B′ respectivement. Montrer que

   $$\overline{\text{DB}'}\,.\,\overline{\text{CA}'} = -a^2,$$

   puis que

   $$\overline{\text{AP}}\,.\,\overline{\text{QB}} = \text{PQ}^2.$$

   Cette dernière relation permet-elle de trouver le rayon du cercle de diamètre PQ, connaissant la distance, u, de son centre au point O ?
3. Montrer que le milieu, I, de RS est sur OM et établir une relation indépendante de θ entre ses distances au point O et à la droite AB.
   En déduire que le lieu de I est une conique de foyer O, dont on précisera la directrice et l'excentricité.
   Sur la médiane passant par I du quadrilatère PQRS, existe-t-il un point dont le lieu soit un cercle (et qui divise cette médiane dans un rapport constant) ?