Durée : 4 heures

Baccalauréat C Polynésie juin 1994

EXERCICE 1 **points**

Dans une population donnée, 56 % des familles occupent une maison individuelle.
Parmi elles, 78 % en sont propriétaires.
Parmi les familles n'occupant pas une maison individuelle, 24 % sont propriétaires de leur logement.

1. On choisit une famille au hasard dans la population considérée. Quelles sont :
   a. la probabilité pour qu'elle soit propriétaire de son logement ?
   b. la probabilité pour qu'elle habite une maison individuelle sachant qu'elle n'en est pas propriétaire ?
2. On interroge cinq familles au hasard dans la population considérée. On suppose que les choix successifs sont indépendants. On appelle X le nombre de familles propriétaires de leur logement.
   a. Quelle est la loi de probabilité de X ? Donner la valeur de $P(X = k)$ en fonction de k.
   Calculer une valeur numérique approchée avec trois décimales de $P(X = k)$ pour k de 0 à 5.
   b. Calculer l'espérance de X.

EXERCICE 2 **points**
Enseignement obligatoire

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère dans $\mathscr{P}$ les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 1 + \text{i}\sqrt{3}, \quad z_{\text{B}} = -1 - \text{i} \text{ et } z_{\text{C}} = -\left(2 + \sqrt{3}\right) + \text{i}.$$

1. **a.** Calculer le module et un argument du nombre complexe : $\text{W} = \dfrac{z_{\text{C}} - z_{\text{B}}}{z_{\text{A}} - z_{\text{B}}}$.
   b. En déduire la nature du triangle ABC.
2. **a.** Écrire le nombre complexe $\dfrac{z_{\text{A}}}{z_{\text{B}}}$ sous forme algébrique.
   b. Écrire les nombres z_{A} et z_{B} sous forme trigonométrique. En déduire la forme trigonométrique de $\dfrac{z_{\text{A}}}{z_{\text{B}}}$.
   c. À l'aide des deux questions précédentes donner les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

EXERCICE 2 **points**
Enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité 1 cm).

1. Déterminer les racines cubiques dans $\mathbb{C}$ de 216 et les mettre sous forme exponentielle.
   On appelle A, B et C les images de ces racines (on notera A le point dont l'affixe est réelle, et B celui dont l'affixe a une partie imaginaire positive). Placer ces points dans le plan.

2. Soit les points D, E et F d'affixes respectives $3+\mathrm{i}\sqrt{3}$, $-3+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $-2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   a. Montrer que D appartient à la droite (AB). Placer D.
   b. Sur quelle droite se trouve E ? Placer E.
   c. Montrer que F appartient à la droite (AC). Placer F.
3. Montrer qu'il existe une similitude directe s unique transformant A en D et B en E et donner son expression complexe.
   Déterminer les éléments caractéristiques de s.
   Vérifier que s transforme C en F.

PROBLÈME **points**

Soit f la fonction numérique de variable réelle définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & x^3(1-\ln x) \quad \text{si } x>0\\ f(0) & = & 0.\end{array}\right.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Unité graphique : 4 cm.

PARTIE A Étude de f

1. **a.** Montrer que f est continue en 0. (On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.)
   b. Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.
   Quelle est l'interprétation géométrique de ce nombre ?
   c. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. **a.** Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
   b. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en chacun des points d'abscisse 1 et e.
   c. Construire $\mathscr{C}$ et les tangentes introduites en b.

PARTIE B Étude d'une aire

Pour tout entier naturel n non nul on pose

$$I_n = \int_{1/n}^{\mathrm{e}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** Quelle est l'interprétation géométrique de I_n ?
   b. Sans calculer I_n étudier le sens de variation de la suite (I_n).
2. **a.** Déterminer l'expression de I_n en fonction de n ; on pourra utiliser une intégration par parties.
   b. En déduire la limite de (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

PARTIE C Résolution de l'équation $f(x) = x$

L'équation $f(x) = x$ admet les deux solutions évidentes 0 et 1.
Le but est à présent de montrer qu'il existe une autre solution α, avec $\alpha > 1$.
On pose

$$g(x) = x^2(1-\ln x) \quad \text{pour } x \in]1\ ;\ +\infty[.$$

1. Étudier les variations de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 1$ d'inconnue x admet une solution α et une seule, dont on donnera un encadrement décimal à 10^{-2} près.
3. Montrer que α est aussi l'unique solution appartenant à $]1\ ;\ +\infty[$ de l'équation $f(x) = x$.