ൠ Baccalauréat S Polynésie septembre 2000 ൠ

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k (k est un entier et $1 \leqslant k \leqslant 6$).
Ce dé a été pipé de telle sorte que :
• les six faces ne sont pas équiprobables,
• les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r,
• les nombres p_1, p_2, p_4 dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. Démontrer que : $p_k = \dfrac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant 6$.
2. On lance ce dé une fois et on considère les évènements suivants :
   — A : « le nombre obtenu est pair »
   — B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 »
   — C : « le nombre obtenu est 3 ou 4 ».

   a. Calculer la probabilité de chacun de ces évènements.

   b. Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.

   c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Les évènements A et C sont-ils indépendants ?
3. On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :
   • d'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires,
   • d'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.

   Le joueur lance le dé :
   • s'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1,
   • s'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2.

   On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche, on note G cet évènement.

   a. Déterminer la probabilité de l'évènement $G \cap A$, puis la probabilité de l'évènement G.

   b. Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.

1. **a.** Exprimer plus simplement le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

   b. En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$ est nul.

   c. Démontrer de même que le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE}$ est nul.

   d. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).
2. Soit I le centre de gravité du triangle BDE. Déduire de **1. a.** que le point I est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE), et préciser la position du point I sur le segment [AG].

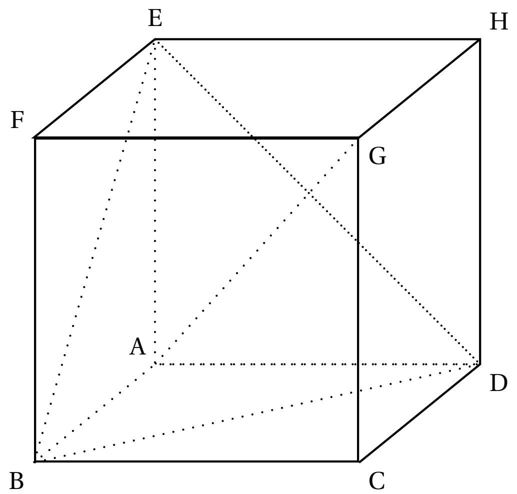
3. Dans cette question, l'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

   a. Écrire une équation du plan (BDE).

   b. Écrire une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point H et orthogonale au plan (BDE).

   c. Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite Δ avec le plan (BDE).

   d. En déduire la distance du point H au plan (BDE).



EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un rectangle de sens direct, AEFB et ADGH sont des carrés de sens direct.

1. Le but de cette première question est de démontrer que les droites (AC), (EG) et (FH) sont concourantes. Pour cela on note I le point d'intersection des droites (EG) et (FH) et on introduit :
   - l'homothétie h_1 de centre I qui transforme G en E.
   - l'homothétie h_2 de centre I qui transforme F en H.

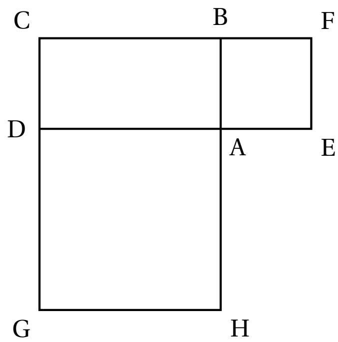
   a. Déterminer l'image de la droite (CG) par l'homothétie h_1 puis par la composée $h_2 \circ h_1$.

   b. Déterminer l'image de la droite (CF) par la composée $h_1 \circ h_2$.

   c. Justifier l'égalité :

   $$h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2.$$

   En déduire que la droite (AC) passe aussi par le point I.



2. On se propose ici de démontrer que la médiane issue du sommet A du triangle AEH est une hauteur du triangle ABD. On note O le milieu du segment [EH].

   a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AO}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AH}$.

   b. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BD}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BD}$ et conclure.

3. Dans cette question, on étudie la similitude directe S qui transforme A en B et D en A.

On pose AB = 1 et AD = k $\quad (k > 0)$.

a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude S.

b. Déterminer l'image de la droite (BD), puis l'image de la droite (AO), par cette similitude S.

c. En déduire que le point d'intersection Ω des droites (BD) et (AO) est le centre de la similitude S.

PROBLÈME **10 points**

Enseignement obligatoire et de spécialité

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x + 1 - x\text{e}^{x-1}.$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

A. Étude de la fonction f
et construction de la courbe $(\mathcal{C})$

1. Étudier la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$ (on pourra écrire $x\text{e}^{x-1} = \dfrac{1}{\text{e}}x\text{e}^{x}$).

2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et préciser la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite Δ.

3. **a.** Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f' en précisant la limite de la fonction f' en - ∞.

c. Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de f' pour tout réel x.

d. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4. Soit I l'intervalle [1,9 ; 2]. Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique, α.

5. Tracer la droite Δ et la courbe $(\mathcal{C})$ (unité graphique : 2 cm).

B. Recherche d'une approximation de α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par :

$$g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right).$$

1. Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur I et démontrer que, pour tout x appartenant à I, $g(x)$ appartient à I.

3. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle I, $|g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{9}$.

4. Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n).$$

On déduit de la question **B 2** que tous les termes de cette suite appartiennent à l'intervalle I. On ne demande pas de le démontrer.

a. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{9}|u_n - \alpha|$.

b. En déduire, en raisonnant par récurrence, que :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}.$$

c. En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

C. Calcul d'aire

1. En intégrant par parties, calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\alpha} x\mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}x$.

2. a. Déterminer, en unités d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ de la portion de plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = \alpha$.

b. Démontrer qu'on peut écrire $\mathcal{A} = (\alpha - 1)\left(\alpha - \dfrac{1}{\alpha}\right)$.