∽ Baccalauréat STT C.G.–I.G. ∾
Pondichéry avril 1999

Exercice 1 **5 points**

Une entreprise fabrique des téléphones mobiles avec deux options possibles ajoutées au modèle standard que l'on notera option A ou option B.
Sur un échantillon de 1 000 commandes une étude statistique a fait apparaître les résultats suivants :

— 20 % des commandes sont faites avec l'option A ;
— parmi les commandes avec option A, 15 % ont aussi l'option B ;
— parmi les commandes sans option A, 4 % ont l'option B.

1. Reproduire et compléter le tableau :

Nombre de commandes	avec option A	sans option A	Total
avec option B			
sans option B			
Total			1 000

2. On prend une commande au hasard dans l'échantillon. On définit les évènements suivants :

A : la commande comprend l'option A ;

B : la commande comprend l'option B ;

a. Calculer la probabilité de l'évènement A puis la probabilité de l'évènement B.

b. Définir par une phrase les évènements $A \cap B$ et $A \cup B$, puis calculer la probabilité de ces deux évènements.

c. Soit l'évènement C : la commande comporte une et une seule option. Déterminer la probabilité de l'évènement C.

3. On choisit une commande au hasard parmi les commandes avec option A de l'échantillon.

Soit l'évènement E : la commande ne comprend pas l'option B. Déterminer la probabilité de l'évènement E.

Exercice 2 **5 points**

Un hôtel veut renouveler une partie de son équipement. Il faut changer au moins 72 coussins, 48 rideaux et 32 jetés de lit.
Deux ateliers de confection font des offres par lots :

— l'atelier Idéa : un lot de 12 coussins, 4 rideaux et 4 jetés de lit pour un montant de 2 000 F.
— l'atelier Rénov : un lot de 6 coussins, 6 rideaux et 2 jetés de lit pour un montant de 1 500 F.

On notera x le nombre de lots Idéa achetés et y le nombre de lots Rénov achetés.

1. Montrer que les contraintes du problème portant sur x et y sont traduites par un système d'inéquations équivalent au système (S) suivant :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \\ 2x+y & \geqslant & 12 \\ 2x+3y & \geqslant & 24 \\ 2x+y & \geqslant & 16 \end{array} \right.$$

2. Résoudre graphiquement le système (S) dans un repère orthonormal (unité : 1 cm).

   Hachurer l'ensemble des points M dont les coordonnées ne vérifient pas le système (S) en expliquant votre démarche pour l'une des inéquations.

3. **a.** Exprimer la dépense occasionnée par l'achat de x lots Idéa et y lots Rénov.

   b. Montrer que l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ occasionnant la dépense D sont les coordonnées des points d'une droite (Δ_D) dont on donnera une équation sous la forme $y = ax + b$.

   c. Tracer la droite (Δ_D) dans le cas particulier où $D = 24\,000$ F.

4. Déterminer graphiquement le nombre de lots de chaque type à acheter pour obtenir une dépense minimale. Calculer cette dépense minimale.

Problème **10 points**

On donne la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 2x + 1 - x\ln x$$

et sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité : 1 cm) ; voir ci-après. La droite (AB) est tangente au point A(1 ; 3). Le point $\mathrm{C}\left(\mathrm{e}^2\ ;\ 1\right)$ appartient à la courbe, le point K(0 ; 1) n'appartient pas à la courbe, B a pour coordonnées (0 ; 2).

Partie A
Étude graphique

Les questions de cette partie A ne seront pas résolues par le calcul mais uniquement par lecture graphique.

1. Déterminer $f'(1)$, le nombre dérivé de f en 1.
2. Résoudre $f(x) > 1$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dont on donnera un encadrement d'amplitude 1.

Partie B
Étude de f

1. Vérifier que $f(x) = x(2 - \ln x) + 1$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. **a.** Calculer la dérivée f' de f.

   b. Résoudre $1 - \ln x > 0$. En déduire le signe de f' sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   c. Dresser le tableau de variations de f. On admettra que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Partie C
Étude de points particuliers

1. Calculer les images exactes des réels $\frac{1}{\mathrm{e}}$, $\sqrt{\mathrm{e}}$, e, e^2.
2. Reproduire et compléter le tableau.

x	8	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5
$f(x)$						

   On donnera les valeurs arrondies à 10^{-2} près.

   Donner, en le justifiant, un encadrement d'amplitude 10^{-1} de la solution α de l'équation $f(x) = 0$.

3. Trouver une équation de la tangente au point d'abscisse e^2.

Partie C
Détermination d'une primitive

1. On donne la fonction G définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$G(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right).$$

Montrer que G est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x \ln x$.

2. Trouver une primitive F de f sur $]0~;~+\infty[$.

3. Calculer, en centimètres carrés, l'aire du domo une plan limité par la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}^2$.