Durée : 4 heures

Baccalauréat C Pondichéry avril 1970

EXERCICE 1

1. On donne deux entiers naturels, a et b, premiers entre eux. Trouver un entier naturel, c, tel que chacun des entiers a, b et c divise le produit des deux autres.
2. On donne deux entiers naturels, a et b, et d leur P.G.C.D. Trouver les entiers naturels, c, tels que chacun des entiers a, b et c divise le produit des deux autres.

   Application numérique $a = 15$, $b = 12$.

EXERCICE 2

On donne deux nombres réels a et α. Calculer le module et l'argument du nombre complexe

$$z = a\frac{(1+\text{itg}\alpha)^2}{1+\text{tg}^2\alpha}.$$

EXERCICE 3

La lettre a désigne un nombre réel donné, strictement positif, et la lettre λ un paramètre variable appartenant à l'ensemble des nombres réels.
On considère, relativement à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$, l'ensemble $\mathscr{F}$ des cercles d'équation

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y + 4a\lambda - 5a^2 = 0.$$

1. Démontrer que l'ensemble $\mathscr{F}$ est un faisceau linéaire de cercles à points de base, A et B, dont on précisera les coordonnées.

   Que représente la droite (Δ) d'équation $y = 2a$ pour ce faisceau ?
2. Soit (O) le cercle du faisceau $\mathscr{F}$ de centre O ; soit F le centre du cercle de ce faisceau qui est tangent à Ox et que l'on désignera par (F). Déterminer analytiquement, par son équation cartésienne, l'ensemble (P) des points ω, centres des cercles (Ω) orthogonaux au cercle (O) et tangents à la droite (Δ).

   (P) est une parabole, dont on déterminera les éléments : foyer, directrice, paramètre.
3. Trouver l'équation de la tangente en ω à (P).

   Montrer que cette tangente est perpendiculaire à OS, où S désigne le point de contact du cercle (Ω), de centre ω, avec (Δ). En déduire que (P) est tangente en A et B au cercle (O).
4. En utilisant une inversion de centre S et de puissance convenable, montrer que le cercle (Ω) est tangent au cercle (F), en un point qu'on appellera T. Utiliser cette dernière propriété pour retrouver géométriquement les résultats du **3.**
5. La polaire de ω, relativement au cercle (O), coupe ce cercle en I$'$et J$'$ et la droite (Δ) en K. Montrer géométriquement que la tangente en T au cercle (F) et la tangente en ω à (P) passent par K.

   Montrer que le cercle de diamètre KO est orthogonal à (Ω).

6. Montrer que les droites SI′ et SJ′ recoupent le cercle (O) respectivement en I et J, diamétralement opposés sur (O).

Quel est l'inverse ω' du point ω dans l'inversion de centre S et de puissance $\overrightarrow{\text{SA}} \cdot \overrightarrow{\text{SB}}$?

Caractériser géométriquement l'ensemble des points ω' quand ω décrit (P).