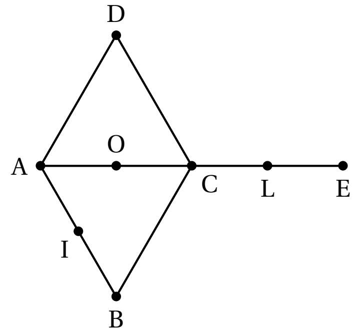
Durée : 4 heures

Baccalauréat C Pondichéry avril 1992

EXERCICE 1 **4 points**

Dans le plan orienté P on considère la figure ci-dessous.
Les triangles ABC et ACD sont deux triangles équilatéraux directs tels que $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ et $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
Les points O et I sont les milieux respectifs de [AC] et [AB] et les points L et E sont tels que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{LE}$.



Soit r la rotation de centre A dont l'angle a pour mesure $\dfrac{\pi}{3}$, et t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.
On note $r' = r \circ t$ (composée de t et de r).

1. **a.** Quelle est l'image de O par r' ?
   b. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IA}\right)$?
   c. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'application r'.
2. M est un point quelconque du plan, on note $N = r(M)$, J le milieu du segment [EM] et K le milieu du segment [ND].
   a. Soit P l'antécédent de M par t. Quel est le milieu du segment [LP] ?
   b. Montrer, lorsque I, J et K sont distincts, que le triangle IJK est équilatéral. On pourra utiliser r'(L) et $r'(P)$.

EXERCICE 2 **4 points**

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On désigne par m un nombre réel et par (E_m) l'ensemble des points M du plan (P), de coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifiant l'équation :

$$(m-1)x^2 + 3my^2 + 2(m-14)x + m + 3 = 0.$$

1. Déterminer (E_m) pour les valeurs particulières m = 0 et m = 1.
2. Pour quelle valeur de m l'ensemble (E_m) est-il un cercle ? Préciser dans ce cas son centre et son rayon.
3. Dans cette question m est un réel non nul et différent de 1.
   Soit O′ le point de coordonnées $(-1\,;\,0)$.
   On notera $(X\,;\,Y)$ les coordonnées de M dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

a. Montrer que l'équation de (E_m) dans ce repère est :

$$(m-1)X^2+3mY^2+4=0.$$

b. En déduire en fonction de m la nature de (E_m).

PROBLÈME **12 points**

Partie A

L'objet de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :
ln x

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}+x-1.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ dont l'unité vaut 2 cm.

1. **a.** Étudier sur $]0~;~+\infty[$ le sens de variation de la fonction g définie par

$$g(x)=x^3-2\ln x+1.$$

b. En déduire que $g(x)>0$ pour tout x de $]0~;~+\infty[$.

2. **a.** Calculer $f'(x)$, et démontrer que $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.

b. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis construire son tableau de variations.

c. Démontrer que la droite D d'équation $y=x-1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
Étudier la position de D par rapport à $\mathscr{C}$.

d. Écrire une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

3. Placer les droites T et D et construire la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B

Soit λ un réel supérieur ou égal à 1.

1. On appelle $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}$, D et les droites d'équations $x=1$ et $x=\lambda$.
Calculer $\mathscr{A}(\lambda)$. (On pourra utiliser une intégration par parties).

2. Déterminer la limite L de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

3. Montrer que l'équation :

$$\mathscr{A}(\lambda)=\frac{L}{2}$$

est équivalente à l'équation (E) définie par $2\ln\lambda-\lambda+2=0$.

4. Prouver que l'équation (E) admet une unique solution a sur $[1~;~+\infty[$.
Vérifier que $5<a<6$.

Partie C

Cette partie va permettre de déterminer une approximation de a.
Pour cela, on introduit la suite (u_n) définie par $u_0=5$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\varphi(u_n)$, où φ est la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $\varphi(x)=2\ln x+2$.

1. **a.** Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n appartient à $[5~;~6]$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite est égale à a.

2. **a.** Prouver que pour tout x de l'intervalle $[5 ; 6]$ on a :

$$\left|\varphi'(x)\right| \leqslant \frac{2}{5}.$$

b. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - a| \leqslant \frac{2}{5}\,|u_n - a|.$$

c. Démontrer alors que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$|u_n - a| \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

3. Déterminer un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de a à 10^{-3} près.
En déduire alors une approximation de a à 10^{-3} près.