Durée : 4 heures

Baccalauréat C Pondichéry septembre 1968

EXERCICE 1

Sachant que l'équation ;

$$x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0,$$

admet deux racines réelles opposées et deux racines complexes, déterminer ces quatre racines.

EXERCICE 2

On considère l'application qui, au nombre réel x, fait correspondre le nombre réel

$$f(x) = \sqrt{x(x-3)^2}.$$

Étudier la fonction f ; construire son graphe dans un repère orthonormé.
Quelle particularité présente ce graphe au point d'abscisse 3 ?

EXERCICE 3

On considère, dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$, la transformation ponctuelle (T) qui, à tout point M, de coordonnées $(x~;~y)$, distinct de l'origine, associe le point $M'\left(x'~;~y'\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' &=& \dfrac{8x}{4x^2+y^2},\\ y' &=& \dfrac{8y}{4x^2+y^2}. \end{array}\right.$$

1. **a.** Déterminer l'ensemble des points doubles de (T). On trouve une courbe (C), que l'on construira.

   b. Calculer l'expression $4x'^2 + y'^2$. En déduire les expressions de x et y en fonction de x' et y'. Que peut-on en conclure pour la transformation (T) ?
2. On étudie les transformés de certains ensembles du plan par (T) :

   a. Quel est le transformé d'une droite issue de l'origine ?

   b. Quel est le transformé d'une droite d'équation $x = x_0$?
   On appellera (C_1) la courbe obtenue. Quelle est sa nature ? Déterminer ses éléments remarquables. Montrer que son excentricité est constante lorsque x_0 varie.

   c. Quel est le transformé d'une droite d'équation $y = y_0$? On appellera (C_2) la courbe obtenue. Quelle est sa nature ? Déterminer ses éléments remarquables. Montrer que son excentricité est constante quand y_0 varie.
3. On considère maintenant les transformations ponctuelles suivantes :

   $\mathscr{A}$: affinité orthogonale d'axe $x'\mathrm{O}x$ et de rapport $\dfrac{1}{2}$;
   $\mathscr{A}'$: affinité orthogonale d'axe $x'\mathrm{O}x$ et de rapport 2 ;
   $\mathscr{J}$: inversion de pôle O et de puissance 2.
   (On rappelle que le produit de la transformation S suivie de la transformation S' est noté $S' \circ S$.)

a. On effectue d'abord $\mathscr{A}$, puis $\mathscr{J}$, puis $\mathscr{A}'$. La transformation produit T_1 est donc telle que $T_1 = \mathscr{A}' \circ \mathscr{J}\mathscr{I} \circ \mathscr{A}$.

Effectuer $T_1 \circ T_1$. Quelle propriété de T_1 en déduit-on ?

b. Le point $M(x\,;\,y)$ est transformé par T_1 en $M'\left(x'\,;\,y'\right)$.

Exprimer x' et y' en fonction de x et y. Montrer ainsi que T_1 est identique à la transformation (T).

c. Retrouver géométriquement les résultats des parties 1 et 2. En particulier, préciser pourquoi les coniques obtenues au 2, b et au 2, e ont même excentricité.

Démontrer, en outre, que le transformé d'une droite quelconque du plan ne passant pas par l'origine est une conique ayant encore l'excentricité déjà trouvée.