∽ Baccalauréat S Pondichéry mai 2001 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

1. On pose, pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n \text{e}^{-x}\,dx.$$

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

b. Prouver que, pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 \text{e}^{-x}\,dx.$$

En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

c. Montrer, en utilisant une intégration par parties que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$$

2. On considère la suite réelle (a_n), définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_n = \frac{1}{\text{e}} + (-1)^n I_n.$$

b. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère l'application f qui à tout nombre complexe z différent de 1, associe le nombre complexe

$$f(z) = \frac{2-\text{i}z}{1-z}.$$

L'exercice étudie quelques propriétés de f.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, dans lequel seront représentés les ensembles trouvés aux questions **1** et **2**.
A est le point d'affixe 1 et B celui d'affixe -2i.

1. On pose $z = x + \text{i}y$ avec x et y réels.
Écrire $f(z)$ sous forme algébrique. En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un réel et représenter cet ensemble.

2. On pose $z' = f(z)$.

a. Vérifier que i n'a pas d'antécédent par f et exprimer, pour z' différent de i, z en fonction de z'.

b. M est le point d'affixe z (z différent de 1) et M' celui d'affixe z' (z' différent de i).

Montrer que $\text{O}M = \dfrac{M'\text{C}}{M'\text{D}}$ où C et D sont les points d'affixes respectives 2 et i.

c. Montrer que, lorsque le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A, son image M' appartient à une droite fixe que l'on définira géométriquement.

d. Montrer que, si M est un point de l'axe des réels, différent de O et de A, alors M' appartient à la droite (CD).

EXERCICE 2 (SPÉCIALITÉ) **4 points**

1. On considère l'équation (1) d'inconnue $(n,\ m)$ élément de $\mathbb{Z}^2$:

$$11n - 24m = 1.$$

a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).

c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2. recherche du P.G.C.D. de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

a. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

b. $(n,\ m)$ désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire

$$\left(10^{11n} - 1\right) - 10\left(10^{24m} - 1\right) = 9.$$

c. Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$.

(on rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a-1)\left(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^0\right)$, valable pour tout entier naturel n non nul).

Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

$$\left(10^{11} - 1\right)N - \left(10^{24} - 1\right)M = 9.$$

d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.

e. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

PROBLÈME **12 points**

Dans tout le problème, $(\mathscr{C})$ désigne la courbe d'équation $y = \ln x$ représentant la fonction logarithme népérien dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O et d'unité graphique 4 cm.

Question préliminaire : Tracer avec soin mais sans étude de la fonction, la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D) d'équation $y = x$.

Partie A

1. a. Déterminer une équation de la tangente (Δ) à $(\mathscr{C})$ au point I d'abscisse 1.

b. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x - 1 - \ln x.$$

c. En déduire la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à Δ.

2. a. Déduire de la question précédente la valeur minimale prise par $x - \ln x$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

b. M et N sont les points de même abscisse x des courbes $(\mathscr{C})$ et (D) respectivement.

Déterminer la plus petite valeur (exprimée en cm) prise par la distance MN lorsque x décrit l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

1. Soit M le point d'abscisse x de la courbe $(\mathscr{C})$. Exprimer la distance OM de l'origine à M en fonction de x.

2. *Étude de la fonction auxiliaire u définie sur* $]0\,;\,+\infty[$ *par* $u(x) = x^2 + \ln x$.

a. Justifier les limites de $u(x)$ en 0 et en $+\infty$ ainsi que le sens de variations de u.

b. Montrer qu'il existe un réel α et un seul tel que $u(\alpha) = 0$.

Montrer que α est compris entre 0,5 et 1 puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

c. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant la valeur de x.

3. *Étude de la fonction g définie sur* $]0\,;\,+\infty[$ *par* $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$.

Calculer $g'(x)$ et vérifier que $g'(x) = \dfrac{2}{x}u(x)$.

En déduire le tableau de variations de g.

4. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de la plus courte distance de l'origine aux points de la courbe $(\mathscr{C})$ et en donner une valeur approchée (exprimée en cm) en utilisant pour α la valeur centrale de l'encadrement trouvé à la question **2. b**.

5. A étant le point d'abscisse α de $(\mathscr{C})$, démontrer que la tangente en A est perpendiculaire à la droite (OA).

Partie C Étude d'une suite

1. Montrer que le réel α défini dans **la partie B** est solution de l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$h(x) = x - \frac{1}{4}\left(x^2 + \ln x\right).$$

2. **a.** Calculer $h'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$.

b. Prouver que $h\left(\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$.

c. Calculer $h''(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$.

d. En déduire que, pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$, on a

$$0 \leqslant h'(x) \leqslant 0,3.$$

3. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = h\left(u_n\right).$$

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$, et que la suite (u_n) est décroissante.

b. *Attention, cette question n'est plus au nouveau programme du baccalauréat S.*

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que l'on a pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,3|u_n - \alpha|$ puis que $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}(0,3)^n$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

d. Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-5} près et indiquer la valeur de u_{n_0} donnée par la calculatrice (avec 5 décimales).