

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Pondichéry avril 1994 ∞

EXERCICE 1

points

Enseignement obligatoire

On considère, dans le plan orienté, un triangle OAB rectangle isocèle tel que :
 $OA = OB = a$ et $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{2}$. Pour la figure, on prendra $a = 5$ cm.

On note I le milieu du segment [AB].

Soit M un point de la droite (OA), λ le réel tel que $\vec{MA} = \lambda \vec{OA}$ et soit N le point défini par $\vec{NB} = -\lambda \vec{OB}$.

1. Dans cette question, M est différent de A.
 - a. Déterminer une mesure en radians de l'angle (\vec{MA}, \vec{NB}) .
 - b. On considère la rotation r qui transforme A en B et M en N.
Préciser l'angle de cette rotation.
Soit Ω son centre. Montrer que $O\Omega B$ est un carré.
2. On note J le milieu de [MN] et P le point tel que OMP soit un rectangle.
 - a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s de centre Ω qui transforme M en J .
 - b. Déterminer l'ensemble E des points J lorsque M décrit la droite (OA).
En déduire l'ensemble F des points P lorsque M décrit la droite (OA).
Représenter E et F .

EXERCICE 2

points

Enseignement obligatoire

Soit h la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par

$$h(x) = (x-2)e^x + x$$

et (\mathcal{C}) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Calculer h' , puis h'' .
Déterminer le sens de variation de h' , puis le signe de h' .
En déduire les variations de h .
2. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$. Dresser le tableau de variations de h .
3.
 - a. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (\mathcal{C}) . préciser l'intersection de (\mathcal{C}) et (D) et leurs positions relatives.
 - b. Préciser la tangente (T) à (\mathcal{C}) au point d'abscisse 0.
Tracer (\mathcal{C}) , (D) et (T) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

PROBLÈME**points**

On se propose de trouver une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, s'annulant pour $x = 1$ et vérifiant la propriété :

$$\text{pour tout } x > 0, \quad x f'(x) - 3f(x) = 3 \ln x \quad (E)$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Trouver toutes les fonctions polynômes P du troisième degré telles que, pour tout x réel,

$$xP'(x) - 3P(x) = 0.$$

2. Soit une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ telle que $f(1) = 0$; soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par la relation $f(x) = x^3 h(x)$.

- Calculer $h(1)$.
- Calculer $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et de $h(x)$.
- Montrer que f vérifie la propriété (E) si et seulement si, pour tout $x > 0$, $h'(x) = \frac{3}{x^4} \ln x$.
- On suppose que f vérifie la propriété (E).

Montrer que h est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4} \ln t dt$.

3. Montrer qu'il existe une fonction f et une seule, solution du problème posé, et en donner l'expression.