# Corrigé du baccalauréat S Pondichéry avril 2001

**EXERCICE 1** **4 points**

1. **a.** Calcul de $I_1$

On a : $I_1 = \dfrac{1}{1!}\displaystyle\int_0^1 (1_x)^1 e^{-x}\,dx = \int_0^1 (1_x)^1 e^{-x}\,dx$ ;

Faisons une intégration par parties en posant

$$\left\{\begin{array}{ll} u(x) = 1-x & u'(x) = -1 \\ v'(x) = e^{-x} & v(x) = -e^{-x}\end{array}\right.$$

Toutes les fonctions étant intégrables sur $[0\,;\,1]$, il vient : $I_1 = \left[-(1-x)e^{-x}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 (-1)(-e^{-x}\,dx = 1 - \int_0^1 e^{-x}\,dx = 1 + \left[e^{-x}\right]_0^1 = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

**b.** Inégalités :

Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a successivement : $0 \leqslant 1-x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant (1-x)^n \leqslant 1$ car $(n \geqslant 1)$

et, compte tenu du fait que $e^{-x}$ est positif, on obtient :

$0 \leqslant (1-x)^n e^{-x} \leqslant e^{-x}$ ;

la positivité de l'intégrale nous permet alors d'écrire :

$0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-x}\,dx$

et, finalement :

$0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx$.

Conséquence : On a $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[e^{-x}\right]_0^1 = 1 - e^{-1} = \dfrac{e-1}{e}$ et l'inégalité, précédemment obtenue, s'écrit :

$0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n!}\dfrac{e-1}{e}$ : or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$ donc, a fortiori, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

**c.** Pour $n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\int_{0^1} (1-x)^{n+1} e^{-x}\,dx$.

Intégrons par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u(x) = (1-x)^{n+1} & u'(x) = -(n+1)(1-x)^n \\ v'(x) = e^{-x} & v(x) = -e^{-x}\end{array}$$

Toutes ces fonctions étant continues sont intégrables sur $[0\,;\,1]$ et

$I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}\left[-(n+1)e^{-x}(1-x)^n\right]_0^1 - \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\int_0^1 (n+1)(1-x)^n e^{-x}\,dx = \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx$

Finalement : $I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!} - I_n$.

2. **a.** Par récurrence :

*Initialisation* : $a_1 = 0$ et $\dfrac{1}{e} + (-1)^1 I_1 = \dfrac{1}{e} - I_1 = 0$ : la relation est vraie pour $n = 1$.

*Hérédité* : supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ tel que

$a_{p+1} = a_p + \dfrac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} = \dfrac{1}{e} + (-1)^p I_p + \dfrac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} = \dfrac{1}{e} + (-1)^{p+1}\left[\dfrac{1}{p+1)!} - I_p\right] = \dfrac{1}{e} + (-1)^{p+1} I_{p+1}$ d'après la question 1. c.

Conclusion : la relation (1) est vraie pour tout naturel $n$ non nul.

**b.** Limite de la suite $(a_n)$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|(-1)^n I_n\right| = 0$.

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{\text{e}}$.

**EXERCICE 2** **4 points**

**1.** Écriture de $f(z)$ sous forme algébrique Avec $z = x + \text{i}y$ ($z$ et $y$ réels) :

$f(z) = \dfrac{2-\text{i}z}{1-z} = \dfrac{2-\text{i}(x+\text{i}y)}{1-x-\text{i}y} = \dfrac{2+y-\text{i}x}{1-x-\text{i}y} = \dfrac{(2+y-\text{i}x)(1-x+\text{i}y)}{(1-x+\text{i}y)(1-x-\text{i}y)} =$

$\dfrac{(2+y)(1-x)+xy+\text{i}y(2+y)+\text{i}(x(x-1)}{(1-x)^2+y^2} = \dfrac{2-2x+y+\text{i}\left(x^2+y^2-x+2y\right)}{(1-x)^2+y^2}$.

Ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit réel :

Si $z \neq 1$, soit $(x~;~y) \neq (1~;~0)$, c-à-d $M \neq \text{A}$, $f(z)$ existe et $f(z) \in \mathbb{R}$ si sa partie imaginaire est nulle soit d'après la question précédente si :

$x^2+y^2-x+2y = 0 \iff \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2-\dfrac{1}{4}-1 = 0 \iff \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2 = \dfrac{5}{4}$,

équation du cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2}~;~-1\right)$ de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, cercle privé du point A.

**2. a.** Le complexe i n'a pas d'antécédent par $f$. Pour déterminer les antécédents de i par $f$ on doit résoudre l'équation $f(z) = \text{i}$ ; on obtient :

Pour $z \neq 1$ : $f(z) = \text{i} \iff \dfrac{2-\text{i}z}{1-z} = \text{i} \iff 2-\text{i}z = \text{i}-\text{i}z \iff 2 = \text{i}$ qui n'a pas de solution donc i n'a pas d'antécédent par $f$.

Expression de $z$ en fonction de $z'$ ($z' \neq \text{i}$).

Si $z' \neq \text{i}$, $f(z) = z' \iff \dfrac{2-\text{i}z}{1-z} = z' \iff 2-\text{i}z = z'-zz' \iff z(z'-\text{i}) = z'-2 \iff z = \dfrac{z'-2}{z'-\text{i}}$.

Conclusion : tout complexe $z'$, distinct de i, admet, par $f$ un unique antécédent $z$, tel que $z = \dfrac{z'-2}{z'-\text{i}}$.

**b.** Relation : $\text{O}M = \dfrac{M'\text{C}}{M'\text{D}}$

De la relation $z = \dfrac{z'-2}{z'-\text{i}}$ on déduit en prenant les modules :

$|z| = \left|\dfrac{z'-2}{z'-\text{i}}\right| = \dfrac{\left|z'-2\right|}{|z'-\text{i}|}$

ou encore, en notant C le point d'affixe 2, D le point d'affixe i et $M$ et $M'$ les points d'affixes $z$ et $z'$, $\text{O}M = \dfrac{\text{C}M'}{\text{D}M'}$.

**c.** Étude de $M'$ lorsque $M$ décrit le cercle de centre O et de rayon 1

Si le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé de A, on a $\text{O}M = 1$ et par conséquent d'après la question précédente :

$1 == \dfrac{\text{C}M'}{\text{D}M'}$ : cette égalité signifie que $M'$ appartient à la médiatrice $(\Delta)$ de [CD].

**d.** Étude de $M'$ lorsque $M$ décrit l'axe réel

La relation $z = \dfrac{z'-2}{z'-\text{i}}$ donne en termes d'arguments :

$\arg z = \arg(z'-2) - \arg(z'-\text{i}) \quad (\mod .2\pi)$ ;

ou encore :

$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{O}M}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{C}M'}\right) - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{D}M'}\right) \quad (\mod .2\pi) = \left(\overrightarrow{\text{D}M'}, \overrightarrow{\text{C}M'}\right)$.

Si M est un point de l'axe réel distinct de O et de A, on a

$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{O}M}\right) = 0 \quad (\mod .\pi)$ donc

$\left(\overrightarrow{\mathrm{D}M'}, \overrightarrow{\mathrm{C}M'}\right) = 0 \quad \mod .\pi.$

Conclusion : le point $M'$ appartient à la droite (CD) (il est distinct du point D et du point C).

**EXERCICE 2 enseignement de spécialité** **4 points**

**1. a.** 11 nombre premier ne divise pas 24 ; donc 11 et 24 sont premiers entre eux ; d'après le théorème de Bezout il existe des entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $11u+24v = 1$, donc le couple $(4 ; -v)$ est un couple solution de l'équation (1).

**b.** On applique l'algorithme d'Euclide à 24 et 11 :

$24 = 2 \times 11 + 2$

$11 = 5 \times 2 + 1$, soit en remontant :

$1 = 11 - 5 \times 2$

$1 = 11 - 5 \times (24 - 2 \times 11)$ ou encore

$1 = 11 - 5 \times 24 + 10 \times 11$ et enfin

$1 = 11 \times 11 - 5 \times 24$.

Le couple (11 ; 5) est une solution particulière de l'équation (1).

**c.** Résolution de l'équation (1) : on a

$\left\{\begin{array}{lcl} 11n - 24m & = & 1 \\ 11 \times 11 - 24 \times 5 & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow$ (par différence)

$11(n-11) - 24(m-5) = 0 \iff 11(n-11) = 24(m-5) \quad (2)$.

11 divise donc $24(m-5)$, mais on a vu qu'il est premier avec 24, donc d'après le théorème de Gauss il divise $m-5$.

Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m - 5 = 11k \iff m = 5 + 11k$.

En reportant dans l'équation (2), on obtient :

$11(n-11) = 24 \times 11k \iff n - 11 = 24k \iff n = 11 + 24k$.

Conclusion : les solutions de l'équation (1) sont les couples $(n ; m)$ tels que :

$$n = 11 + 24k \quad \text{et} \quad m = 5 + 11k.$$

**2. a.** Pour $a \in \mathbb{N}$, on sait que :

$a^n - 1 = (a-1)\left(a^{n-} + a^{n-2} + \ldots + a + 1\right)$.

En particulier : $10^n - 1 = (10-1)\left(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1\right)$ ou encore : $10^n - 1 = 9\left(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1\right)$ égalité qui montre que 9 divise $10^n - 1$, donc en particulier $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

**b.** Puisque $(n ; m)$ est un couple solution de l'équation (1) : $11n - 24m = 1$ ou encore $11n = 24m + 1$.

Donc $\left(10^{11n} - 1\right) - 10\left(10^{24m} - 1\right) = \left(10^{24m+1} - 1\right) - 10\left(10^{24m} - 1\right) =$
$\left(10^{24m} \times 10 - 1\right) - 10\left(10^{24m} - 1\right) = -1 + 10 = 9$.

**c.** On a $10^{11n} - 1 = \left(10^{11}\right)^n - 1$ et d'après l'égalité rappelée au a. :

$\left(10^{11}\right)^n - 1 = \left(10^{11} - 1\right)\left(10^{11(n-1)} + 10^{11(n-2)} + \ldots + 1\right)$, donc $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$.

Il existe donc un entier $\alpha$ tel que $10^{11n} - 1 = \alpha\left(10^{11} - 1\right)$.

On démontrerait de la même façon que $10^{24} - 1$ divise $10^{24n} - 1$ et qu'il existe donc un entier $\beta$ tel que $10^{24n} - 1 = \beta\left(10^{24} - 1\right)$.

L'égalité trouvée au b. $\left(10^{11n} - 1\right) - 10\left(10^{24m} - 1\right) = 9$ peut donc s'écrire :

$\alpha\left(10^{11} - 1\right) - 10 \times \beta\left(10^{24} - 1\right) = 9$.

On a donc trouvé deux entiers $N = \alpha$ et $M = 10\beta$ tels que :

$$N\left(10^{11} - 1\right) - M\left(10^{24} - 1\right) = 9.$$

**d.** Tout diviseur commun à $10^{11}-1$ et à $10^{24}-1$ divise les produits $N\left(10^{11}-1\right)$ et $M\left(10^{24}-1\right)$ et aussi leur différence et par conséquent 9.

**e.** On vient de voir que tout diviseur commun à $10^{11}-1$ et à $10^{24}-1$ et donc en particulier leur P. G. C. D. divise 9, mais on a vu inversement que 9 divise $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$.
Conclusion : P. G. C. D.$\left(10^{11}-1\ ;\ 10^{24}-1\right)=9$.

**PROBLÈME** **12 points**

**Partie A**

**1. a.** C a pour coordonnées $(1\,;\,0)$. Une équation de la tangente $(\Delta)$ à la courbe $C$ représentative de la fonction $x \longmapsto \ln x$ a pour équation :
$M(x\ ;\ y) \in (\Delta) \iff y-0=\dfrac{1}{1}(x-1) \iff y=x-1$.

**b.** $f(x)=x-1-\ln x$.
La fonction est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.
Comme $x>0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$. D'où le tableau de variations :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

**c.** Le tableau de variation montre que $f(x)\geqslant 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
Mais $x-1-\ln x\geqslant 0 \iff x-1\geqslant \ln x$ et cette inégalité montre que la droite $(\Delta)$ est au dessus de la courbe $C$, le seul point de contact étant le point C.

**2. a.** Le résultat précédent peut s'écrire :
$x-1-\ln x\geqslant 0 \iff x-\ln x\geqslant 1$ et cette valeur 1 est obtenue de façon évidente pour $x=1$.
Le minimum de la fonction $x-\ln x$ est 1.

**b.** On a $M(x\,;\,\ln x)$ et $N(x\ ;\ x)$, donc $MN^2=(x-x)^2+(x-\ln x)^2=(x-\ln x)^2$.
or on vient de voir que le minimum de $x-\ln x$ est 1 donc le minimum de $MN^2$ est $1^2=1$, donc le minimum de $MN$ est 1, soit avec une unité graphique de 4 cm : le minimum de $MN$ égale 4 cm.

**Partie B**

**1.** $\mathrm{O}(0\,;\,0)$ ; $M(x\ ;\ \ln x)$, donc $\mathrm{O}M^2=x^2+(\ln x)^2$.
Donc $\mathrm{O}M=\sqrt{x^2+(\ln x)^2}$.

**2.** Étude de $u$ définie par $u(x)=x^2+(\ln x)^2$.

**a.** On a $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=+\infty$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$.
$u$ somme de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle on a :
$u'(x)=2x+2\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2+2}{x}$ : tous les termes de ce quotient sont positifs, donc la dérivée est positive et la fonction $u$ est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ de $-\infty$ à $+\infty$.

**b.** D'après la question précédente $u$ établit une bijection de $]0\ ;\ +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et l'équation $u(x) = 0$ a une solution unique $\alpha \in ]0\ ;\ +\infty[$.
La calculatrice donne $u(0,5) \approx -0,44$ et $u(1) = 1$, donc $0,5 < \alpha < 1$.
Puis $u(0,65) \approx -0,008$ et $u(0,66) \approx 0,020$, d'où l'encadrement :

$$0,65 < \alpha < 0,66.$$

**c.** Le résultat précédent et le tableau de variations de $u$ montrent que :
- $u(x) < 0$ sur $]0\ ;\ \alpha[$ ;
- $u(\alpha) = 0$ ;
- $u(x) > 0$ sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

**3.** Étude de $g$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$.
$g$ somme de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
$g'(x) = 2x + 2\ln x \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 + 2\ln x}{x} = \dfrac{2}{x}\left(x^2 + \ln x\right) = \dfrac{2}{x}u(x)$.
Comme $\dfrac{2}{x} > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $u(x)$ et celui-ci a été trouvé à la question précédente ; il dépend de la position de $x$ par rapport à $\alpha$. On a donc le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $g(\alpha)$ | $\nearrow$ | |

On a de façon immédiate : $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
On sait que $u(\alpha) = \alpha^2 + \ln \alpha = 0 \iff \ln \alpha = -\alpha^2$.
Donc $g(\alpha) = \alpha^2 + (\ln \alpha)^2 = \alpha^2 + \left(-\alpha^2\right)^2 = \alpha^2 + \alpha^4$.

**4.** Puisque $\text{O}M = \sqrt{g(x)}$, la plus courte distance est $\sqrt{g(\alpha)}$.
En prenant comme valeur approché de $\alpha \approx 0,655$ et compte tenu de l'unité graphique la plus courte distance O$M$ est environ $4\sqrt{g(\alpha} \approx 3,12$ (cm)

**5.** On a $\text{A}(\alpha\ ;\ \ln \alpha)$ ; la tangente en A à $C$ a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{\alpha}$ et donc pour vecteur directeur $\overrightarrow{t}\ (\alpha\ ;\ 1)$.
Donc $\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{t} = \alpha^2 + \ln \alpha = u(\alpha) = 0$.
Les vecteurs sont orthogonaux donc la tangente à $(C)$ en A est perpendiculaire à (OA).

**Partie C**

**1.** $h(x) = x - \dfrac{1}{4}\left(x^2 + \ln x\right)$.
$h(x) = x \iff x - \dfrac{1}{4}\left(x^2 + \ln x\right) = x \iff \dfrac{1}{4}\left(x^2 + \ln x\right) = 0 \iff x^2 + \ln x = 0 \iff u(x) = 0$.
On a vu que cette équation avait pour solution unique $\alpha$.

**2.** **a.** $h$ somme de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
$h'(x) = 1 - \dfrac{1}{4}\left(2x + \dfrac{1}{x}\right) = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4x}\left(4x - 2x^2 - 1\right) = \dfrac{1}{4x}\left(-2x^2 + 4x - 1\right)$.
Comme $\dfrac{1}{4x} > 0$, le signe de $h'(x)$ est celui du trinôme $-2x^2 + 4x - 1$.

Or $-2x^2+4x-1 = -2\left(x^2-2x+\dfrac{1}{2}\right) = -2\left[(x-1)^2-1+\dfrac{1}{2}\right] = -2\left[(x-1)^2-\dfrac{1}{2}\right] =$
$-2\left[x-1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]\left[x-1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Les solutions de l'équation $h'(x) = 0$ sont donc :

$1-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,29$ et $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx\approx 1,7$.

On sait que le trinôme est négatif sauf sur l'intervalle [0,29 ; 1,7], donc en particulier sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ où $h'(x) > 0$.

**b.** On a $h(1) = \frac{3}{4} = 0,75$ et $h\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,61$.

On a vu que la dérivée est positive, donc la fonction croissante de $h\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,61$ à $h(1) = 0,75$.

Donc $h\left(\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.

**c.** Dérivée seconde :

$h'$ est elle-même dérivable et sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ :

$h''(x) = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4x^2} = \dfrac{1-2x^2}{4x^2} = \dfrac{\left(1+x\sqrt{2}\right)\left(1-x\sqrt{2}\right)}{4x^2}$.

Comme $1+x\sqrt{2}$ et $4x^2$ sont positifs le signe de $h''(x)$ est celui de la différence $1-x\sqrt{2}$, donc

$h''(x) < 0$ sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ 1\right]$ et

$h''(x) > 0$ sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

**d.** De la question précédente on peut établir le tableau de variations de $h'$ :

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h'(x)$ | $0,25$ | $\nearrow$ | $h'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\approx 0,293$ | $\searrow$ | $0,25$ |

$+\infty$

$h'\left(\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = 1-\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}} = 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,293$.

Conclusion : pour tout réel $x$ de $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$, $0 \leqslant h'(x) < 0,3$.

**3.** $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = h\left(u_n\right)$.

**a.** On a vu à la question 2. b. que l'image par $h$ d'un réel de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ appartenait à ce même intervalle.

Le premier terme de la suite appartient à cette suite et une récurrence évidente montre que tous les termes de la suite appartiennent à ce même intervalle.

Par récurrence :

- Initialisation : $u_1 = h\left(u_0\right) = h(1) = 0,75 \leqslant u_0$.
- Hérédité : supposons qu'il existe un rang $p$ tel que $u_p \leqslant u_{p-1}$ ; par croissance de la fonction $h$ sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ on obtient $h\left(u_p\right) \leqslant h\left(u_{p-1}\right) \iff u_{p+1} \leqslant u_p$.

On a bien démontré par récurrence que la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante.

**b.** On sait $h(\alpha) = \alpha$, donc :

$\left|u_{n+1}-\alpha\right| = \left|u_{n+1}-h(\alpha)\right|$.

$u_n$ et $\alpha$ appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$on applique l'inégalité des accroissements finis à $h$ et compte tenu que $h'(x)$ est majorée par 0,3 :

$\left|u_{n+1}-\alpha\right| \leqslant 0,3\left|u_n-\alpha\right|$.

On a donc successivement :

$\left|u_n-\alpha\right| \leqslant 0,3\left|u_{n-1}-\alpha\right| \leqslant (0,3)^2\left|u_{n-2}-\alpha\right| \leqslant \ldots \leqslant (0,3)^n\left|u_0-\alpha\right|$.