Baccalauréat S Pondichéry avril 1996

EXERCICE 1 **4 points**

Un fabricant de berlingots possède trois machines A, B et C qui fournissent respectivement 10 %, 40 % et 50 % de la production totale de son usine.
Une étude a montré que le pourcentage de berlingots défectueux est de 3,5 % pour la machine A, de 1,5 % pour la machine B et de 2,2 % pour la machine C.
Après fabrication, les berlingots sont versés dans un bac commun aux trois machines. On choisit au hasard un berlingot dans le bac.

1. Montrer que la probabilité que ce berlingot provienne de la machine C et soit défectueux est $0,011$.
2. Calculer la probabilité que ce berlingot soit défectueux.
3. Calculer la probabilité que ce berlingot provienne de la machine C sachant qu'il est défectueux.
4. On prélève successivement dans le bac 10 berlingots en remettant à chaque fois le berlingot tiré dans le bac. Calculer la probabilité d ?obtenir au moins un berlingot défectueux parmi ces 10 prélèvements.

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement obligatoire

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. On considère trois points distincts A, B et C d'affixes respectives $a,\ b$ et c.
   a. Interpréter géométriquement l'argument du quotient $\dfrac{c-a}{b-a}$.
   b. Montrer que A, B et C sont alignés si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a}$ est un nombre réel.
2. Placer sur une figure (unité graphique : 1cm) les points A_1, B_1, et C_1, d'affixes respectives :
$$a_1 = 2, \quad b-1 = \text{i}\sqrt{3}, \quad c_1 = -4+3\text{i}\sqrt{3}.$$
   Montrer, à l'aide de la propriété précédente, que les points A_1, B_1 et C_1 sont alignés.
3. On considère les points A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3, tels que les quadrilatères $\text{OA}_1\text{A}_2\text{A}_3$, $\text{OB}_1\text{B}_2\text{B}_3$, $\text{OC}_1\text{C}_2\text{C}_3$ soient des carrés directs.
   a. Tracer les carrés $\text{OA}_1\text{A}_2\text{A}_3$, $\text{OB}_1\text{B}_2\text{B}_3$, $\text{OC}_1\text{C}_2\text{C}_3$.
   b. Donner les affixes a_3 et b_3 des points A_3 et B_3 puis les affixes a_2 et b_2 des points A_2 et B_2.
   c. À l'aide de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, calculer l'affixe c_3 de C_3 à l'aide de c_1.
   d. En déduire que les points A_3, B_3 et C_3 sont alignés.
4. **a.** Déterminer le réel μ tel que le barycentre du système $\left\{(\text{O},\ \mu),\ (C_1,\ 1),\ (C_3,\ 1)\right\}$ soit C_2.
   b. Calculer l'affixe c_2 de C_2.
   c. Montrer que les points A_2, B_2 et C_2 sont alignés.

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

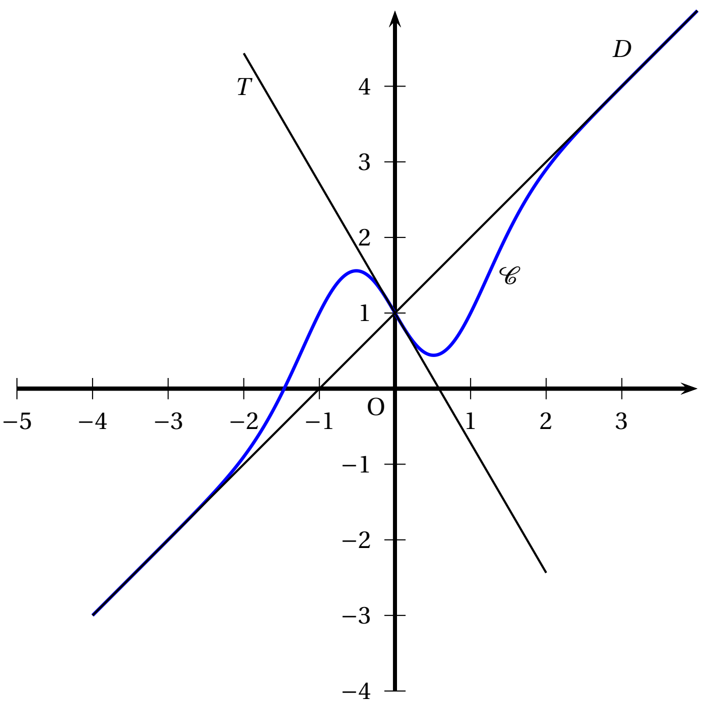
Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Cet exercice propose l'étude de l'ensemble (C) des points M du plan dont les affixes vérifient :

$$|(1+\text{i})z-3+3\text{i}|^2+|z-6|^2=54.$$

1. **Première méthode**
   a. En posant $z=x+\text{i}y$, donner l'équation cartésienne de (C).
   b. En déduire la nature de (C).
   c. Construire (C).
2. **Deuxième méthode**
   On désigne par s la similitude qui, au point M d'affixe z, associe le point $M_1=s(M)$ d'affixe $z_1=(1+\text{i})z-3+3\text{i}$ et on désigne par t la translation qui, au point M d'affixe z, associe le point $M_2=t(M)$ d'affixe $z_2=z-6$.
   a. Caractériser géométriquement ces deux transformations.
   b. Déterminer les antécédents respectifs S et T de O par s et t.
   c. Calculer le rapport $\dfrac{\text{S}M}{\text{O}M_1}$ puis le rapport $\dfrac{\text{T}M}{\text{O}M_2}$.
   d. En déduire que (C) est la ligne de niveau définie par $2\text{S}M^2+\text{T}M^2=54$.
   e. Calculer l'affixe du barycentre G du système $\{(\text{S},\ 2),\ (\text{T},\ 1)\}$
   f. Montrer que l'ensemble (C) est défini par $M\text{G}^2=8$.
   g. En déduire la nature et les éléments qui déterminent (C).

PROBLÈME **12 points**

Sur la figure ci-dessus, sont représentées la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans une repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que son asymptote D et sa tangente T au point d'abscisse 0.



On sait que le point $J(0~;~1)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$ et que l'asymptote D passe par les points $K(-1~;~0)$ et J, et que la tangente T a pour équation réduite $y = (1-\text{e})x+1$.

A Expression de f

1. Déterminer une équation de D.
2. On suppose qu'il existe des réels m et p et une fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x réel, $f(x) = mx+p+\varphi(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$.
   a. Déterminer m et p.
   b. Démontrer que pour tout x réel, $f(x)+f(-x) = 2$.
   c. En déduire que la fonction φ est impaire puis que la fonction f', dérivée de f, est paire.
3. On suppose maintenant que, pour tout x réel :
$$\varphi(x) = (ax+b)\text{e}^{-x^2} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$
   Démontrer en utilisant les données et les résultats précédents que $a = -\text{e}$ et que $b = 0$.

B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1+x-x\text{e}^{-x^2+1}.$$

On suppose que la courbe $\mathscr{C}$ représente la fonction f dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Vérifier que pour tout réel x :
$$f'(x) = 1+\left(2x^2-1\right)\text{e}^{-x^2+1}.$$
   Calculer $f'(0)$.
   b. Vérifier que T est bien la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ vis à vis de sa tangente T.
2. Le graphique suggère l'existence d'un minimum relatif de f sur l'intervalle $[0~;~1]$.
   a. Démontrer que $f''(x)$ est du signe de $6x-4x^3$.
   b. Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution α unique dans l'intervalle $[0~;~1]$.
   c. Montrer que $0,51 < \alpha < 0,52$.
   d. Exprimer $f(\alpha)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes.

C

Sur le graphique, la courbe $\mathscr{C}$ est très proche de son asymptote pour les points d'abscisses supérieure à $2,4$.
Cette partie propose de préciser cette situation en calculant, pour tout réel λ positif ou nul, l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par $\mathscr{C}$, D et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

1. Exprimer $\mathscr{A}(\lambda)$ en fonction de λ.
2. Déterminer la limite A de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.
3. À partir de quelle valeur de λ a-t-on $|\mathscr{A}(\lambda) - \text{A}| \leqslant 10^{-2}$?