# ∽ Baccalauréat S Pondichéry mai 1999 ∾

**Exercice 1** **5 points**
**Commun à tous les candidats**

*Les questions* 2 *et* 3 *sont indépendantes.*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0$.
   On désignera par $z_1$ la solution dont la partie imaginaire est positive et par $z_2$ l'autre solution.
2. **a.** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres $z_1$ et $z_2$.
   **b.** Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$
3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité : 1 cm), on considère le point $M_1$ d'affixe $\sqrt{2}(1+\text{i})$, le point $\text{M}_2$ d'affixe $\sqrt{2}(1-\text{i})$ et le point A d'affixe $z_\text{A} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   **a.** Déterminer l'affixe du point $\text{M}_3$ image de $\text{M}_2$ par l'homothétie $h$ de centre A et de rapport $-3$.
   **b.** Déterminer l'affixe du point $\text{M}_4$ image de $\text{M}_2$ par la rotation $r$ de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   **c.** Placer dans le même repère les points A, $\text{M}_1$, $\text{M}_2$, $\text{M}_3$ et $\text{M}_4$.
   **d.** Calculer $\dfrac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$.
   **e.** Soient I le milieu du segment $[\text{M}_3\text{M}_4]$ et $\text{M}_5$ le symétrique de $\text{M}_1$ par rapport à I. Montrer que les points $\text{M}_1$, $\text{M}_3$, $\text{M}_5$ et $\text{M}_4$ forment un carré.

**Exercice 2** **4 points**
**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**Partie A**

On admet que 1 999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples $(a\,;\,b)$ d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1 999.

**Partie B**

On considère l'équation $(E)$ d'inconnue $n$ appartenant à $\mathbb{N}$ :

$$(E) : n^2 - Sn + 11\,994 = 0 \text{ où } S \text{ est un entier naturel.}$$

On s'intéresse à des valeurs de $S$ telles que $(E)$ admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.

1. Peut-on déterminer un entier $S$ tel que 3 soit solution de $(E)$ ?
   Si oui, préciser la deuxième solution.
2. Peut-on déterminer un entier $S$ tel que 5 soit solution de $(E)$ ?
3. Montrer que tout entier $n$ solution de $(E)$ est un diviseur de 11 994.
   En déduire toutes les valeurs possibles de $S$ telles que $(E)$ admette deux solutions entières.

**Partie C**

Comment montrerait-on que 1 999 est un nombre premier ?
Préciser le raisonnement employé.
La liste de tous les entiers premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous :

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41
43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97.

**Exercice 2** **4 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

On considère un triangle ABC du plan.

1. **a.** Déterminer et construire le point G, barycentre de

$$[(\mathrm{A}\,;\,1)\,;\,(\mathrm{B}\,;\,-1)\,;\,(\mathrm{C}\,;\,1)].$$

   **b.** Déterminer et construire le point G$'$, barycentre de

$$[(\mathrm{A}\,;\,1)\,;\,(\mathrm{B}\,;\,5)\,;\,(\mathrm{C}\,;\,-2)].$$

2. **a.** Soit J le milieu de [AB].
   Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{GG}'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JG}'}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et en déduire l'intersection des droites (GG$'$) et (AB).

   **b.** Montrer que le barycentre I de [(B ; 2) ; (C ; - 1)] appartient à (GG$'$).

   **c.** Soit D un point quelconque du plan. Soient O le milieu de [CD] et K le milieu de [GA].

3. Déterminer trois réels $a$, $d$ et $c$ tels que K soit barycentre de

$$[(\mathrm{A}\,;\,a)\,;\,(\mathrm{D}\,;\,d)\,;\,(\mathrm{C}\,;\,c)].$$

4. Soit X le point d'intersection de (DK) et (AC).
   Déterminer les réels $a'$ et $c'$ tels que X soit barycentre de

$$[(\mathrm{A}\,;\,a')\,;\,(\mathrm{C}\,;\,c')].$$

**Problème** **11 points**

**Commun à tous les candidats**

Soit la fonction numérique $f$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

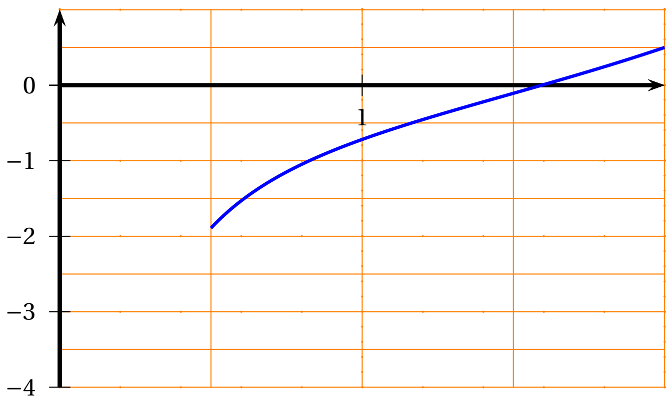
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x^2}.$$

**Partie A**

**Recherche graphique d'un extremum**

L'observation de la courbe représentative de la fonction $f$ sur l'écran graphique d'une calculatrice donne à penser que $f$ admet un minimum sur l'intervalle $[0,5\,;\,2]$. On se propose d'en donner une valeur approchée.

Observer ci-dessous la représentation graphique de la fonction $f'$, dérivée de $f$ sur l'intervalle $[0,5\,;\,2]$.



Quels sont les éléments graphiques concernant $f'$ qui vont dans le sens de l'existence d'un minimum de $f$ sur $[0,5\,;\,2]$ ?
À l'aide de ce graphique, donner un encadrement d'amplitude 0,2 de l'abscisse de ce minimum.

**Partie B**
**Étude de la fonction** $F$

On considère la fonction $h$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + 2$.

1. Déterminer les variations de $h$ (on précisera $h(0)$ mais la limite en $+\infty$ n'est pas demandée).
2. Déterminer le signe de $h\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

   En déduire qu'il existe un unique réel $a$ appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2}\,;\,2\right]$ tel que $h(a) = 0$.
   En déduire le signe de $h$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. Étude de la fonction $f$

   **a.** Calculer les limites de $f$ aux bornes de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   **b.** Montrer que, pour tout nombre $x$ strictement positif,
   $$f'(x) = \frac{x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + 2}{x^3}.$$
   En déduire le sens de variations de $f$ et dresser son tableau de variations.

   **c.** Montrer que $f(a) = \dfrac{-1}{a(a-2)}$ et en déduire le signe de $f(a)$.

**Partie C**
**Recherche d'un encadrement du nombre** $a$

1. Démontrer que, sur $[0\,;\,+\infty[$, l'équation $h(x) = 0$ équivaut à
   $$2\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) = x.$$
2. Soit la fonction $g$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par
   $$g(x) = 2\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right).$$
   On pose $\mathrm{I} = \left[\dfrac{3}{2}\,;\,2\right]$. Montrer que, pour tout $x$ de l'intervalle I, $|g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
3. Soit la suite $(x_n)_{n>1}$ définie par
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \dfrac{3}{2} \\ x_{n+1} & = & g(x_n) \end{array}\right. \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 1.$$
   On admet que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1, $x_n$ appartient à $I$.
4. Démontrer que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1 :
   $$|x_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2}|x_n - a|$$
   $$\text{et} \quad |x_n - a| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$
   En déduire que la suite $(x_n)$ converge vers $a$.

5. Déterminer un entier $p$ tel que $x_p$ soit une valeur approchée à $10^{-3}$ près du nombre réel $a$. Donner une valeur approchée de $x_p$ avec trois décimales.

**Partie D**
**Quelques propriétés d'une primitive de $f$**

On appelle $F$ la primitive de $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$ qui s'annule en 1. Ainsi l'on a, pour tout réel $x$ de $]0\,;\,+\infty[$, $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier le sens de variation de $F$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Démontrer que, pour tout $x$ supérieur ou égal à 2,

$$\int_2^x f(2)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par comparaison de limites, et en utilisant la relation de Chasles, en déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$.