∽ Baccalauréat ES (A1) Pondichéry avril 1994 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Soit les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{4-x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln\left(4-x^2\right).$$

1. Soit $\mathrm{I} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Quel est le signe de I ?

b. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0 ; 1]$

$$f(x) = -1 + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}$$

c. Calculer la valeur exacte de I.

2. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \ln 3 + 21$.

EXERCICE 2 **5 points**

Le jeune Éric, trois ans, s'amuse à taper sur les touches du minitel.

1. Il frappe au hasard sur une touche du clavier, chaque touche ayant la même probabilité d'être frappée. Ce clavier comporte 57 touches dont 26 représentent les 26 lettres de l'alphabet français.

a. Quelle est la probabilité pour qu'il frappe une lettre ?

b. Quelle est la probabilité pour qu'il frappe une lettre de son prénom ?

2. Éric frappe successivement 4 touches, distinctes ou non.
Quelle est la probabilité de chacun des évènements suivants :

a. Éric frappe son prénom.

b. Éric frappe les 4 lettres de son prénom.

c. Éric frappe 4 touches différentes.

d. Éric frappe son prénom sachant qu'il a frappé 4 touches différentes.
On donnera les résultats approchés sous la forme $a \times 10^{-n}$ où n est un entier naturel et a un nombre entier tel que $0 < a < 10$.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty ; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 2x - 4.$$

On appelle (C) sa représentation graphique dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses, et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. Soit $g(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\frac{3}{2}\mathrm{e}^{x} - 1\right)$.
Montrer que $g(x)$ s'annule pour $x = \ln 3$.
Étudier le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]-\infty ; 1]$.

3. **a.** Montrer que $f(x) - (-2x - 4) = g(x)$.
   b. En déduire que la droite (D) d'équation $y = -2x - 4$ est asymptote à (C).
   Étudier la position de (C) par rapport à (D).
4. Calculer $f'(x)$. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1]$,

$$f'(x) = \left(3\mathrm{e}^x + 2\right)\left(\mathrm{e}^x - 1\right).$$

   En déduire le signe de $f'(x)$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Partie B

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution x_0 dans l'intervalle $[-3\,;\,0]$.
   En utilisant la calculatrice donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de x_0.
2. **a.** Résoudre l'équation $3\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2 = 2$ en posant $X = \mathrm{e}^x$.
   b. En déduire qu'il existe un point A unique de (C) où la tangente a pour coefficient directeur 2 et que l'abscisse de A est égale à $\ln\dfrac{4}{3}$.
3. Tracer la droite (D), la courbe (C) et la tangente à (C) en A.