Baccalauréat ES (B) Pondichéry avril 1994

EXERCICE 1 **4 points**

1. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par

$$P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24.$$

   a. Calculer $P(2)$. En déduire une factorisation de $P(x)$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

2. En déduire les solutions dans   des équations suivantes :

   a. $2\ln x + \ln(x-1) = \ln(14x - 24)$

   b. $e^{2x} - e^x + 24e^{-x} - 14 = 0$.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans cet exercice tous les résultats seront donnés sous forme de fractions.

Une urne contient trente boules numérotées de 1 à 30 indiscernables au toucher.

1. On tire au hasard une boule de l'urne. Calculer :

   a. la probabilité que le numéro de la boule tirée soit multiple de 3 et de 5 ;

   b. la probabilité que le numéro de la boule tirée soit multiple de 3 ou de 5.

2. On tire au hasard 3 boules successivement et avec remise.
   Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois un numéro multiple de 3 et de 5.

PROBLÈME **12 points**

Soit la fonction numérique f définie sur $]0\ +\infty[$ par

$$f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unité graphique : 2 cm).

Partie I

1. Après avoir factorisé $f(x)$, déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Prouver que pour tout x réel strictement positif on a

$$f'(x) = 3(\ln x - 1)(\ln x + 1)$$

   où f' désigne la dérivée de la fonction f.
   Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\ +\infty[$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0\ +\infty[$. Que représentent pour (C) les solutions de cette équation ?

5. Construire (C).

Partie II

Soient I, J, et K les intégrales définies par :

$$I = \int_{1/\ln \mathrm{e}}^{1} \ln x \,\mathrm{d}x, \quad J = \int_{1/\ln \mathrm{e}}^{1} (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x, \quad K = \int_{1/\ln \mathrm{e}}^{1} (\ln x)^3 \,\mathrm{d}x.$$

1. Soit la fonction G définie sur $]0\ +\infty[$ par :

$$G(x) = x\ln x - x.$$

Montrer que G est une primitive de la fonction g définie sur $]0\ +\infty[$ par $g(x) = \ln x$.

En déduire la valeur de I.

2. Soit la fonction H définie sur $]0\ +\infty[$ par :

$$H(x) = x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x).$$

Montrer que H est une primitive de la fonction h définie sur $]0\ +\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$. En déduire la valeur de J.

3. **a.** Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $K = \dfrac{1}{\mathrm{e}} - 3J$ et en déduire que $K = \dfrac{6}{\mathrm{e}} - 6$.

b. En utilisant I et K calculer $\displaystyle\int_{1/\ln \mathrm{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

4. En déduire l'aire, en cm^2, de l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan tels que :

$$\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

On donnera la valeur exacte du résultat puis la valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.